

Table des matières

1	Mécanique	3
1.1	La cinématique	3
1.1.1	Systèmes de coordonnées et cinématique	3
1.1.2	Repère de Frénet et abscisse curviligne	6
1.1.3	Changements de référentiel	8
1.2	Les lois de la mécanique du point	11
1.2.1	Grandeurs cinétiques	11
1.2.2	Principes de la mécanique	12
1.2.3	Mécanique et énergie	13
1.3	Exercices	17
1.3.1	Compréhension du cours	17
1.3.2	Compréhension du cours	19
1.4	Problème (Mines 96)	33
2	Thermodynamique	39
2.1	Les concepts de base	39
2.1.1	Quelques définitions	39
2.1.2	L'état gazeux	41
2.1.3	La statique des fluides	48
2.2	Le premier principe de la thermodynamique	50
2.2.1	Définitions	51
2.2.2	Enoncé du premier principe	53
2.2.3	Application du premier principe : la détente de Joule-Gay Lussac	55
2.3	Exercices	56
2.3.1	Compréhension du cours	56
2.3.2	Approfondissement	60
3	Electrocinétique	69
3.1	Notions générales d'électricité	69
3.1.1	Courant électrique et intensité	69

3.1.2	Les différents régimes	71
3.1.3	La loi d'Ohm	71
3.2	Les circuits électriques	73
3.2.1	Les dipôles électriques	73
3.2.2	Exemples	74
3.2.3	Les circuits linéaires : définition et théorèmes	77
3.3	Exercices	85
3.3.1	Compréhension du cours	85
3.3.2	Approfondissement	89
4	Electromagnétisme	101
4.1	Notion de charge	101
4.1.1	Les particules chargées	101
4.1.2	Distributions de charges	102
4.1.3	Distribution de courant	104
4.2	Le champ électrostatique	105
4.2.1	Loi de Coulomb	105
4.2.2	Le théorème de Gauss	107
4.3	Le champ magnétostatique	111
4.3.1	Loi de Biot et Savart	111
4.3.2	Le théorème d'Ampère	112
4.4	Exercices	116
4.4.1	Compréhension du cours	116
4.4.2	Approfondissement	120

Chapitre 1

Mécanique

1.1 La cinématique

La cinématique est l'étude des mouvements d'un système indépendamment des causes qui leur donnent naissance. Bien qu'elle ait déjà été étudiée en partie au lycée ce paragraphe présente quelques nouveautés, en particulier concernant les repères non cartésiens. Ces nouvelles notions permettront par la suite une étude simplifiée de certains systèmes.

1.1.1 Systèmes de coordonnées et cinématique

Soit un point matériel M dont on veut étudier le mouvement. Avant tout, il convient comme toujours de se donner un *référentiel* d'étude \mathcal{R} , c'est-à-dire un repère (O, x, y, z) de l'espace et un repère de temps (origine et écoulement du temps). Alors, dans \mathcal{R} , M peut être repéré par son vecteur position :

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM(t)}$$

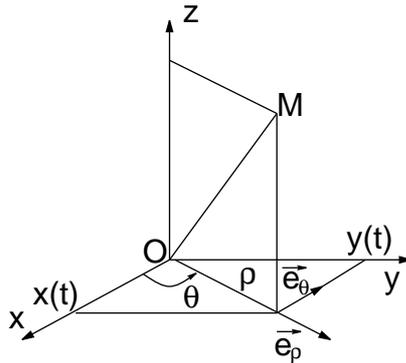
Différents repères

Dans beaucoup de problèmes, le repérage de M en coordonnées cartésiennes permet une résolution rapide. Il est de la forme :

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Dans cette équation, $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont les coordonnées cartésiennes de M dans \mathcal{R} à chaque instant t.

Coordonnées cylindriques Toutefois, pour peu que le système étudié présente des symétries intéressantes, il est parfois plus simple d'utiliser d'autres systèmes de coordonnées. En particulier, le repérage de M peut se faire en *coordonnées cylindriques* si l'on observe une symétrie particulière par rapport à un axe donné, que nous prendrons égal à \vec{e}_z (voir figure). M est bien sûr toujours repéré par trois nombres (puisqu'il a trois degrés de liberté) :



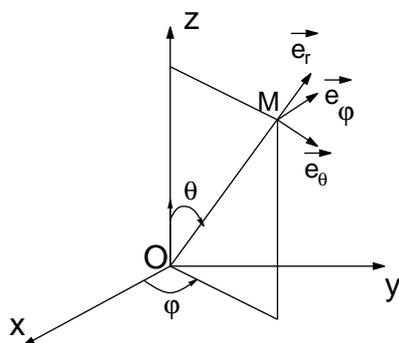
- ρ est la distance de M à l'axe
- θ est l'angle formé par \vec{e}_x et \vec{e}_ρ
- z est la troisième coordonnée habituelle.

Avec ces notations, il est clair que $\vec{r}(t) = \rho(t)\vec{e}_\rho(t) + z(t)\vec{e}_z(t)$. Ainsi, l'étude du mouvement de M peut-être très simplifiée dans un tel repère par rapport à un repère cartésien. Il suffit, pour s'en convaincre, d'étudier un mouvement circulaire d'axe \vec{e}_z (c'est-à-dire dont la trajectoire est un cercle d'axe \vec{e}_z) dans chacun de ces repères.

Coordonnées sphériques Si, par exemple, on étudie le mouvement d'un point matériel restant à distance constante d'un point O, il peut être très intéressant d'utiliser des *coordonnées sphériques*. Celles-ci sont définies par (voir aussi la figure) :

- r est la distance au point O
- θ est l'angle formé par Oz et \vec{OM} , appelé *colatitude*
- φ est l'angle formé par Ox et \vec{Om} , appelé *longitude*

Alors, la décomposition de $\vec{r}(t)$ sur la nouvelle base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ est $\vec{r}(t) = r(t)\vec{e}_r(t)$.



Expressions des caractéristiques cinématiques

On rappelle que la vitesse \vec{v} et l'accélération \vec{a} de M sont respectivement définies par

$$\begin{aligned} - \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \\ - \vec{a} &= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \end{aligned}$$

En coordonnées cartésiennes, les vecteurs de base sont indépendants du temps, ce qui fournit, par une dérivation élémentaire :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d}{dt}(x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}) \\ &= \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k} \quad (1.2)$$

En coordonnées cylindriques ou sphériques, les expressions des dérivées successives sont un peu plus complexes puisque, cette fois, les vecteurs de base dépendent de la position du point M. Ainsi :

En coordonnées cylindriques,

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d}{dt}(\rho(t)\vec{e}_\rho(t) + z(t)\vec{k}) \\ &= \dot{\rho}\vec{e}_\rho(t) + \rho(t)\frac{d\vec{e}_\rho(t)}{dt} + \dot{z}\vec{k} \end{aligned}$$

Cette formule s'obtient par simple dérivation, \vec{k} étant constant, mais il est possible d'obtenir une expression de la vitesse et de l'accélération sur les vecteurs de base. Pour cela, nous allons utiliser les résultats très importants suivants. On constate sur la figure que $\vec{e}_\rho = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$, ce qui fournit

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = -\dot{\theta}\sin\theta\vec{i} + \dot{\theta}\cos\theta\vec{j}$$

$$= \dot{\theta}(-\sin \theta \vec{v} + \cos \theta \vec{f})$$

Il reste à remarquer que $-\sin \theta \vec{v} + \cos \theta \vec{f} = \vec{e}_\theta$ pour conclure que

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

On peut montrer par le même type de calculs que

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_\rho$$

Finalement, on en déduit la formule très utile suivante :

$$\vec{v} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{k}$$

Dérivons cette égalité pour obtenir une formule analogue sur l'accélération.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (\ddot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{\rho} \frac{d\vec{e}_\rho}{dt}) + ((\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta + \rho \dot{\theta} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt}) + \ddot{z} \vec{k} \\ &= (\ddot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\theta} \vec{e}_\theta) + ((\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta - \rho \dot{\theta}^2 \vec{e}_\rho) + \ddot{z} \vec{k} \\ &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{k} \end{aligned}$$

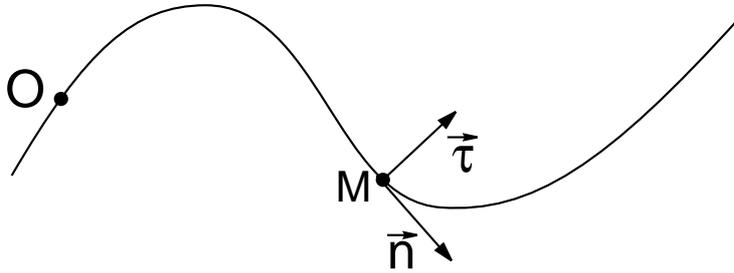
Ces deux formules sont fondamentales car leur connaissance est un atout majeur dans la résolution de certains exercices. Par exemple, si l'on étudie une masse ponctuelle soumise à une unique force constamment dirigée vers un point fixe O (c'est par exemple le cas de l'attraction gravitationnelle), l'application du principe fondamental de la dynamique projeté sur \vec{e}_θ montre que $2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} = 0$. Nous verrons en exercice à quel point ce résultat peut se révéler utile.

En coordonnées sphériques, le même type de calculs fournit :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \rho \sin \theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \\ \vec{a} &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 + \rho \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho \\ &= +(\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho} \dot{\theta} - \rho \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\theta \\ &= +(2\dot{\rho} \sin \theta \dot{\varphi} + 2\rho \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta + \rho \sin \theta \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

1.1.2 Repère de Frénet et abscisse curviligne

Dans l'espace, la trajectoire de la particule M est une courbe paramétrée (par le temps) avec un sens de parcours. On peut associer à cette courbe un repère mobile, appelé repère de Frénet et défini comme suit.



O est l'origine de la trajectoire, et peut être défini de manière arbitraire, le plus courant étant de le choisir comme la position de M à l'instant initial. On peut désormais introduire l'abscisse curviligne s comme la longueur de la portion de courbe OM.

On note maintenant $\vec{\tau} = \frac{d\vec{OM}}{ds}$ le vecteur tangent à la courbe au point M. $\vec{\tau}$ est unitaire.

Ensuite, on définit le vecteur normal \vec{n} par $\vec{n} = R \frac{d\vec{\tau}}{ds}$ où R est un réel non nul choisi tel que $\|\vec{n}\| = 1$ et \vec{n} soit orienté vers le centre de la trajectoire.

Remarquons que

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{\tau} &= R \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \vec{\tau} \\ &= \frac{R d(\vec{\tau} \cdot \vec{\tau})}{2 ds} \\ &= \frac{R d\|\vec{\tau}\|^2}{2 ds} \\ &= \frac{R d(1)}{2 ds} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc \vec{n} et $\vec{\tau}$ sont perpendiculaires et la donnée des trois vecteurs $\vec{\tau}$, \vec{n} , $\vec{\tau} \wedge \vec{n}$ définit une base orthonormée directe, appelée base de Frénet. Si l'on prend M comme origine, le repère ainsi formé est le repère de Frénet. On a alors les formules importantes suivantes :

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{R} \vec{n}$$

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{\vec{\tau}}{R}$$

De plus, $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \vec{\tau}$.

Le passage de $\frac{d}{dt}$ à $\frac{d}{ds} \frac{ds}{dt}$ est assez intuitif en ce sens où il correspond à une simple multiplication par ds du numérateur et du dénominateur. Toutefois, il faut bien comprendre que ce résultat, très utilisé en physique, repose en fait sur la formule de dérivation d'une fonction composée (i.e. $\frac{d(f \circ s)}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{df}{ds}(s(t))$).

Par ailleurs, nous pouvons remarquer à ce stade que \dot{s} représente la norme de la vitesse de M .

Enfin, on retrouve la formule suivante de terminale, que l'on démontrera à titre d'exercice :

$$\vec{a} = \ddot{s} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{n}$$

1.1.3 Changements de référentiel

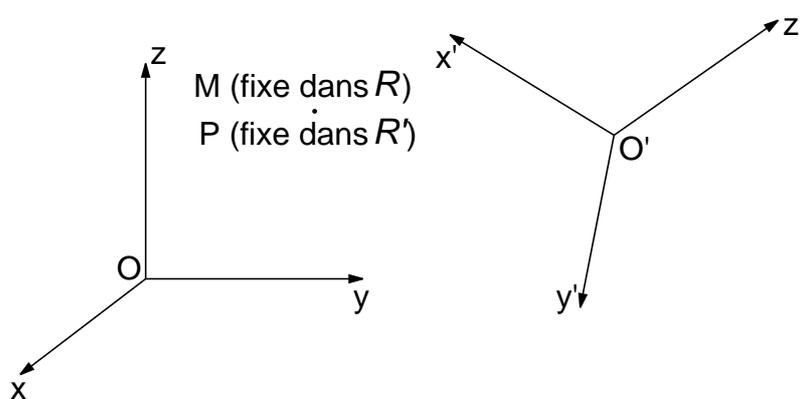
On considère dans ce paragraphe deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' , munis des systèmes d'axes (O, x, y, z) et (O', x', y', z') .

On qualifiera (R) de référentiel absolu. Cela n'a pas de réel sens physique mais, intuitivement, "absolu" signifie que \mathcal{R} est "fixe" tandis que \mathcal{R}' est "mobile" par rapport à \mathcal{R} .

Par exemple, si l'on fait une expérience dans un train en mouvement, le référentiel terrestre pourra être considéré comme le référentiel absolu, dans lequel le référentiel lié au train est en mouvement.

L'objet de ce paragraphe est de donner les formules liant vitesses et accélérations dans \mathcal{R} et dans \mathcal{R}' . Commençons par quelques définitions préliminaires.

Point coïncidant et vitesse d'entraînement



Soit M un point matériel.

Par définition, le point coïncidant de M est le point P fixe dans \mathcal{R}' , qui à l'instant t_0 , coïncide avec M.

Alors, on appelle vitesse d'entraînement de \mathcal{R}' dans \mathcal{R} en M la vitesse du point coïncidant de M dans \mathcal{R} .

Vecteur rotation

Nous nous intéressons ici au cas où \mathcal{R}' est en simple rotation par rapport à \mathcal{R} , selon un axe fixe que nous prendrons égal à O_z . O_z est donc fixe à la fois dans \mathcal{R} et dans \mathcal{R}' et les axes O_x' et O_y' sont repérables dans \mathcal{R} par l'angle θ qu'ils forment respectivement avec O_x et O_y . On voit de plus que :

$$\begin{aligned}\vec{e}_x' &= \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \\ \vec{e}_y' &= -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y\end{aligned}$$

Dérivons ces deux vecteurs dans \mathcal{R} , c'est-à-dire en considérant que les vecteurs $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sont constants.

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{e}_x'}{dt} /_{\mathcal{R}} &= \dot{\theta} \vec{e}_y' \\ \frac{d\vec{e}_y'}{dt} /_{\mathcal{R}} &= -\dot{\theta} \vec{e}_x' \\ \frac{d\vec{e}_z'}{dt} /_{\mathcal{R}} &= 0\end{aligned}$$

On s'aperçoit alors que, avec $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{e}_z$, on obtient les trois formules suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{e}_x'}{dt} /_{\mathcal{R}} &= \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_x' \\ \frac{d\vec{e}_y'}{dt} /_{\mathcal{R}} &= \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_y' \\ \frac{d\vec{e}_z'}{dt} /_{\mathcal{R}} &= \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_z'\end{aligned}$$

Par définition, le vecteur rotation de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} est l'unique vecteur tel que ces trois relations soient vérifiées. Remarquons que nous avons étudié ici un cas simple, dans lequel l'axe de rotation est fixe. Nous verrons en exercices que l'on peut rencontrer des situations plus complexes, mais que cette définition du vecteur rotation reste valable.

Alors, si M est un point matériel en mouvement dans l'espace, on déduit des trois formules précédentes que

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

Les formules sur les vitesses

Nous revenons ici au cas d'un mouvement relatif quelconque des deux référentiels. Soit O un point fixe dans \mathcal{R} et O' un point fixe dans \mathcal{R}' .

La vitesse de M dans \mathcal{R} , que nous noterons $\overrightarrow{v}_{\mathcal{R}}(M)$, peut se calculer comme suit :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v}_{\mathcal{R}}(M) &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \\ &= \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \\ &= \overrightarrow{v}_{\mathcal{R}}(O') + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M} \\ \overrightarrow{v}_{\mathcal{R}}(M) &= \overrightarrow{v}_{\mathcal{R}'}(M) + \underbrace{\overrightarrow{v}_{\mathcal{R}}(O') + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{\overrightarrow{v}_e} \end{aligned}$$

On voit ici l'importance de la vitesse d'entraînement dans les problèmes impliquant plusieurs référentiels. En effet, la formule obtenue en (1.15) montre que la vitesse de M dans \mathcal{R} est somme de sa vitesse dans \mathcal{R}' et de la vitesse dans \mathcal{R} de son point coïncidant.

Les formules sur les accélérations

Des calculs similaires montrent que l'on a :

$$\overrightarrow{a}_{\mathcal{R}}(M) = \overrightarrow{v}_{\mathcal{R}'}(M) + \underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} \Big|_{\mathcal{R}} + \frac{d\overrightarrow{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{\overrightarrow{a}_e} + \overbrace{2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}_{\mathcal{R}'}(M)}^{\overrightarrow{a}_c}$$

Dans cette relation, \overrightarrow{a}_e représente l'accélération d'entraînement qui, comme son nom l'indique, n'est autre que l'accélération du point coïncidant de M dans \mathcal{R} . Quant à \overrightarrow{a}_c , on l'appelle accélération de Coriolis et n'a pas de signification physique intuitive. Nous verrons en exercices quelle est son influence sur un système mécanique.

1.2 Les lois de la mécanique du point

La résolution des problèmes de mécanique en classes préparatoires repose sur quelques lois simples que nous allons énoncer ici. Auparavant, nous allons définir les grandeurs cinétiques nécessaires à la compréhension de ces lois.

1.2.1 Grandeurs cinétiques

La quantité de mouvement dans un référentiel \mathcal{R}

Soit M un point matériel de masse m . Sa quantité de mouvement dans \mathcal{R} est donnée par

$$\vec{p}_{\mathcal{R}}(M) = m\vec{v}_{\mathcal{R}}(M)$$

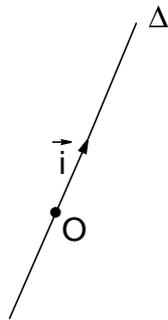
A moins qu'il y ait possible confusion quant au référentiel, on utilisera les notations simplifiées $\vec{p} = m\vec{v}$.

Le moment cinétique de M en O dans \mathcal{R}

Il est lié à la "vitesse de rotation" de M autour de O et est défini par :

$$\begin{aligned}\vec{L}_{\mathcal{R}}^O(M) &= m\vec{OM} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}}(M) \\ \vec{L}^O &= m\vec{OM} \wedge \vec{v} \\ &= \vec{OM} \wedge \vec{p}\end{aligned}\tag{1.3}$$

Le moment cinétique de M par rapport à un axe Δ



Soit Δ un axe passant par O et orienté par un vecteur \vec{i} . Le moment cinétique de M par rapport à Δ dans \mathcal{R} est donné par

$$\vec{L}_{\mathcal{R}}^{\Delta}(M) = \vec{i} \cdot \vec{L}_{\mathcal{R}}^O(M)$$

Remarquons que cette définition a bien un sens dans la mesure où, quel que soit le point O choisi sur l'axe, le produit scalaire du second terme est le même (i.e. $\forall(O, O') \in \Delta, \vec{v} \cdot \vec{L}_{\mathcal{R}}^{O'}(M) = \vec{v} \cdot \vec{L}_{\mathcal{R}}^O(M)$).

Le moment d'une force

Si l'on applique au point M une force \vec{F} , le moment de \vec{F} en O est

$$\vec{M}_{\vec{F}}^O = \vec{OM} \wedge \text{vect}F$$

1.2.2 Principes de la mécanique

Nous commencerons ici par un rappel des lois de Newton vues en classe de Terminale, puis nous verrons quelques compléments utiles.

Le principe d'inertie

Il existe au moins un référentiel dans lequel toute particule isolée (ou pseudo-isolée) vérifie $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$. Ce référentiel est alors dit Galiléen.

Ce principe a déjà été vu en Terminale, mais sous une forme un peu simplifiée. En effet, si l'on s'intéresse à un système de masse variable, il faut bien penser à faire entrer la masse dans la dérivée : ce n'est pas l'accélération qui est nulle, mais la variation de la quantité de mouvement.

La relation fondamentale de la dynamique

Dans un référentiel Galiléen, toute modification de la quantité de mouvement (i.e. de la vitesse *et/ou* de la masse) doit être attribuée à une force de valeur $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

Principe de l'action et de la réaction

Si M_1 et M_2 sont deux particules formant un système isolé, alors la force qu'exerce M_1 sur M_2 est opposée à celle qu'exerce M_2 sur M_1 : $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$

Théorème du moment cinétique

On se place ici dans un référentiel galiléen \mathcal{R} .

Soit O un point *fixe* de \mathcal{R} et M un point de masse m constante. Alors,

$$\frac{d\vec{L}^O}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{OM} \wedge \vec{v})$$

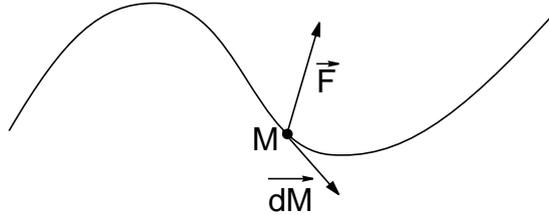
$$\begin{aligned}
&= \frac{d(m\overrightarrow{OM})}{dt} \wedge \vec{v} + m\overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} \\
&= m\vec{v} \wedge \vec{v} + m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{a} \quad (\text{on utilise ici les hypothèses } m \text{ constante et } O \text{ fixe}) \\
&= \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}
\end{aligned}$$

1.2.3 Mécanique et énergie

Travail et puissance d'une force

Soit M une particule soumise à une force \vec{F} et subissant un petit déplacement $d\vec{M}$.

Le travail élémentaire de \vec{F} est alors $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{M}$ et la puissance de \vec{F} est $P = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$.



Si la force est orthogonale au déplacement de la particule, il est clair que travail et puissance sont nuls.

Si M se déplace entre A et B, le travail de \vec{F} entre A et B est l'intégrale :

$$W = \int_A^B \delta W dt = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{M} dt$$

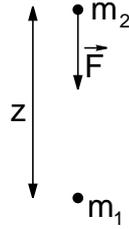
Energie potentielle

Il arrive que le travail de \vec{F} appliquée à une particule se déplaçant entre A et B soit indépendant du chemin suivi. Dans ce cas, on dit que \vec{F} est conservative, ou encore qu'elle dérive d'une énergie potentielle E_p . On pose alors $E_p(A) - E_p(B) = W$, où W est le travail entre A et B (indépendant du chemin suivi). Sous cette forme, il apparaît que E_p est définie à une constante additive près.

On a de plus la formule extrêmement importante suivante, que nous admettrons :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad} E_p = \begin{pmatrix} -\frac{\partial E_p}{\partial x} \\ -\frac{\partial E_p}{\partial y} \\ -\frac{\partial E_p}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Considérons à titre d'exemple les forces dites de Newton, dont la force de gravitation est un cas particulier. On dit que deux corps 1 et 2 sont en interaction par une force de Newton si $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{k}{z^2} \vec{u}_{2 \rightarrow 1}$, où z est la distance entre 1 et 2 et $\vec{u}_{2 \rightarrow 1}$ est le vecteur unitaire dirigé de 2 vers 1.



Alors, le travail élémentaire de \vec{F} est donné par

$$\begin{aligned} \delta W &= \vec{F} \cdot d\vec{M} \\ &= \frac{k}{z^2} \vec{u}_{2 \rightarrow 1} \cdot d\vec{M} \\ &= -\frac{k}{z^2} dz \end{aligned}$$

En intégrant ce travail élémentaire entre une position initiale et une position finale, on obtient (voir schéma) :

$$\begin{aligned} W &= \int_{z_i}^{z_f} -\frac{k}{z^2} dz \\ &= k \times \left(\frac{1}{z_f} - \frac{1}{z_i} \right) \end{aligned}$$

Sous cette dernière forme, on voit que le travail des forces de Newton au cours d'un déplacement ne dépend que des distances initiales et finales entre les deux corps, et non du chemin suivi par ces deux corps au cours du déplacement : les forces de Newton dérivent d'un potentiel.

Energie cinétique

Elle est définie pour un point matériel par $E_c = \frac{1}{2}mv^2$. Dans le cas d'un solide, cette définition devient naturellement $E_c = \frac{1}{2}mv_G^2$, où v_G est la vitesse du centre d'inertie du solide.

On a alors le théorème fondamental suivant, appelé théorème de l'énergie cinétique :

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique du système mécanique entre deux instants t_1 et t_2 est $E_{c_1} - E_{c_2} = W$, où W est le travail de toutes les forces appliquées entre ces deux instants.

Ce théorème est extrêmement utile dans la résolution de certains exercices dans lesquels l'énergie cinétique et le travail des forces sont relativement simples à exprimer. Il fournit une alternative souvent intéressante à l'application du principe fondamental de la dynamique.

Energie mécanique

C'est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle d'un système : $E_m = E_c + \sum E_p$.

On déduit du théorème de l'énergie cinétique que si les forces qui travaillent (c'est-à-dire telles que $\delta W = 0$ pour tout déplacement élémentaire) sont toutes conservatives, alors l'énergie mécanique d'un système se conserve au cours du mouvement.

En effet, $dE = dE_c + \sum dE_p$ donc, au cours d'un déplacement entre A et B, la variation d'énergie mécanique est

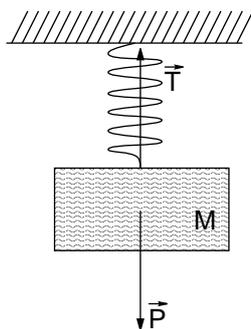
$$\begin{aligned}
 \Delta E &= \int_A^B dE \\
 &= \int_A^B (dE_c + \sum dE_p) \\
 &= \Delta E_c + \int_A^B \sum dE_p \\
 &= W + \int_A^B \sum dE_p \text{ (d'après le théorème de l'énergie cinétique)} \\
 &= W - W \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Soit par exemple le cas du pendule vertical à ressort (voir figure).

La masse m est soumise à son poids ($E_{p_1} = mgz$) et à la tension du ressort ($E_{p_2} = \frac{1}{2}kz^2$), qui sont deux forces conservatives. Le théorème précédent permet donc d'affirmer que l'énergie mécanique du système masse, ressort, terre, (c'est-à-dire $E_c + E_{p_1} + E_{p_2}$) est conservée au cours du temps.

L'équilibre

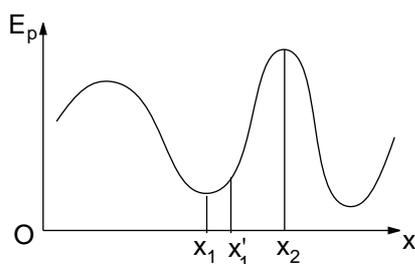
Quelques définitions



1. Un point matériel est dit en équilibre dans un référentiel \mathcal{R} si sa vitesse est nulle et reste indéfiniment nulle dans \mathcal{R} .
2. Un système est en équilibre stable si, légèrement écarté de sa position d'équilibre, il a tendance à y revenir.
3. Si, au contraire, il a tendance à s'en écarter, l'équilibre est dit instable.

Si la particule est soumise à une force conservative, l'équilibre stable correspond à un minimum local d'énergie potentielle tandis que l'équilibre instable correspond à un maximum local.

Pour expliquer cette dernière remarque, plaçons-nous dans le cas d'un système unidimensionnel, c'est-à-dire qu'une seule variable suffit à caractériser. Alors E_p est une fonction de cette variable x dont on peut tracer la courbe.



Supposons le système au point d'équilibre x_1 et envisageons un déplacement vers x'_1 . Au cours de ce déplacement, x_1 étant un minimum, $\frac{dE_p}{dx} > 0$.

Or le système est soumis à la force $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p = -\frac{dE_p}{dx}\vec{e}_x$.

Ainsi, $\vec{F} \cdot \vec{e}_x = -\frac{dE_p}{dx} < 0$, donc le système a tendance à revenir à sa position initiale.

Le même type d'argument permet de montrer que x_2 est un équilibre instable.

Pour résumer, dans le cas unidimensionnel, un équilibre stable se traduit par $\frac{dE_p}{dx} = 0$ et $\frac{d^2E_p}{dx^2} \geq 0$ tandis qu'un équilibre instable se traduit par $\frac{dE_p}{dx} = 0$ et $\frac{d^2E_p}{dx^2} \leq 0$.

1.3 Exercices

1.3.1 Compréhension du cours

Exercice 1. Coordonnées cartésiennes et cylindriques

Soit un point matériel M se déplaçant selon l'équation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = \alpha e^t \cos t \\ y(t) = \alpha e^t \sin t \\ z(t) = \beta e^t \end{cases}$$

1. Calculer à tout instant la vitesse et l'accélération de M (c'est-à-dire les normes des vecteurs vitesse et accélération).
2. Exprimer à chaque instant les coordonnées cylindriques de M.
3. En déduire une vérification du 1.

Correction

$$1. \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha e^t (\cos t - \sin t) \\ \alpha e^t (\cos t + \sin t) \\ \beta e^t \end{pmatrix}$$

$$\text{Une seconde dérivation fournit } \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} -2\alpha e^t \sin t \\ 2\alpha e^t \cos t \\ \beta e^t \end{pmatrix}$$

Les normes se calculent alors simplement et l'on a, en utilisant le fait que $\cos^2 + \sin^2 = 1$,

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = e^{2t}(2\alpha^2 + \beta^2).$$

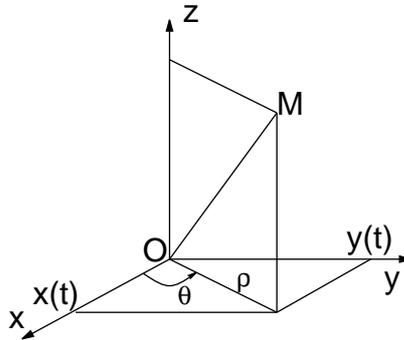
Finalement, $v = e^t \sqrt{2\alpha^2 + \beta^2}$.

Le même type de calculs fournit $a = e^t \sqrt{4\alpha^2 + \beta^2}$.

2. On a bien sûr $z(t) = \beta e^t$.

Pour les autres coordonnées, une figure permet de trouver rapidement le résultat.

En effet, on voit que, dans le cas le plus général, $x(t) = \rho(t) \cos t$ et que $y(t) = \rho(t) \sin t$. Il suffit donc de poser $\theta(t) = t$ et $\rho(t) = \alpha e^t$ pour que



ces relations générales soient vérifiées. En conclusion, le paramétrage recherché est :

$$\begin{cases} \rho(t) = \alpha e^t \\ \theta(t) = t \\ z(t) = \beta e^t \end{cases}$$

3. Dès lors, il suffit d'utiliser les formules du cours, que nous rappellerons ici.

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{k} \\ &= \alpha e^t \vec{e}_\rho + \alpha e^t \vec{e}_\theta + \beta e^t \vec{e}_z \quad (\text{puisque } \dot{\theta} = \frac{dt}{dt} = 1) \end{aligned}$$

$(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ étant une base orthonormée, la norme de \vec{v} se déduit par la formule $v^2 = v_\rho^2 + v_\theta^2 + v_z^2$. Ainsi, $v = e^t \sqrt{2\alpha^2 + \beta^2}$. De la même façon,

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{k} \\ &= (\alpha e^t - \alpha e^t) \vec{e}_\rho + (2\alpha e^t + \alpha e^t - 0) \vec{e}_\theta + \beta e^t \vec{e}_z \end{aligned}$$

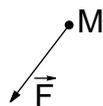
On en déduit que $a = e^t \sqrt{4\alpha^2 + \beta^2}$.

Cet exercice est une illustration de la nécessité d'utiliser les coordonnées cylindriques lorsque le système présente, comme ici, des symétries particulières. En effet, les calculs du 3. pouvaient presque se faire de tête parce que les coordonnées étaient bien choisies. En règle générale, dès qu'interviennent des fonctions trigonométriques dans la définition d'un système, il est indispensable de commencer par se demander si un passage en cylindriques ou en sphériques ne simplifierait pas l'étude.

1.3.2 Compréhension du cours

Exercice 2. Mouvement à force centrale

Une particule est dite soumise à une force centrale si la seule force \vec{F} à laquelle elle est soumise passe en permanence par un point fixe O.



1. Montrer qu'une telle particule se déplace dans un plan contenant O (pour cela, on montrera que $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$ est un vecteur constant).
2. Montrer que $C = \rho^2 \dot{\theta}$ est une constante.
3. En utilisant un système cylindrique d'axe z orthogonal au plan du mouvement, démontrer les *formules de Binet* suivantes.

$$v^2 = C^2 \left(\left(\frac{1}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right)^2 \right)$$
$$\vec{a} = -\frac{C^2}{\rho^2} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{d^2 \left(\frac{1}{\rho} \right)}{d\theta^2} \right) \vec{e}_\rho$$

Correction

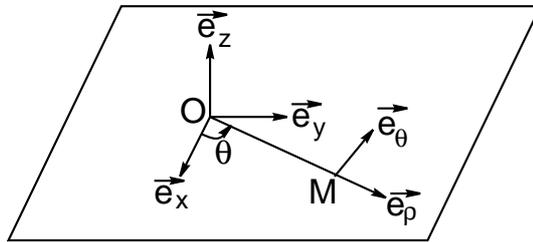
1. Introduisons le moment cinétique de M par rapport à O, $\vec{L} = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$, et montrons qu'il est constant en le dérivant par rapport au temps.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= m \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \\ &= \overrightarrow{OM} \wedge \vec{a} \end{aligned}$$

Or $m\vec{a} = \vec{F}$ donc $\frac{d\vec{L}}{dt} = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = 0$ puisque \vec{F} et \overrightarrow{OM} sont colinéaires à tout instant. Cela permet de conclure que $m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$ est un vecteur constant que nous noterons \vec{n} .

Considérons alors l'unique plan passant par O et orthogonal à \vec{n} . A tout instant, \overrightarrow{OM} appartient à ce plan puisqu'il est normal à \vec{n} (en effet, par définition du produit vectoriel, deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} sont toujours perpendiculaires à $\vec{a} \wedge \vec{b}$). Finalement, M se déplace bien dans un plan contenant O.

2. Pour montrer que C est constante, la question précédente nous met dans la voie. En effet, on vient de montrer que \vec{L} est constant. Il faut donc faire apparaître un lien entre C et \vec{L} . Calculons, \vec{v} dans un système de coordonnées cylindriques choisi de façon que $\vec{e}_z = \vec{n}$ (voir figure).



D'après la formule du cours,

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$$

M se déplaçant dans le plan défini par $z=0$, $\dot{z} = 0$ donc

$$\begin{aligned} \vec{L} &= m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} \\ &= m \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \rho\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= m\rho^2\dot{\theta}\vec{e}_z \end{aligned}$$

Cela démontre que $\frac{d\rho^2\dot{\theta}}{dt} = 0$.

3. Pour démontrer ces formules il est (comme souvent) beaucoup plus simple d'essayer de s'en rapprocher en s'en inspirant autant que possible, même si cela peut paraître artificiel :

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2 \\ &= (\rho^2\dot{\theta})^2 \left(\frac{1}{\rho^4\dot{\theta}^2}\dot{\rho}^2 + \frac{1}{\rho^2} \right) \\ &= C^2 \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{\dot{\rho}^2}{\rho^4\dot{\theta}^2} \right) \end{aligned}$$

Il ne reste donc plus qu'à montrer que $\frac{\dot{\rho}^2}{\rho^4 \dot{\theta}^2} = \left(\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right)^2$. Pour cela, on procède dans l'esprit de la remarque précédente, en partant cette fois à l'envers.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right)^2 &= \left(\frac{-\frac{d\rho}{d\theta}}{\rho^2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{\rho^4} \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 \\ &= \frac{1}{\rho^4} \left(\frac{d\rho}{dt} \times \frac{dt}{d\theta} \right)^2 \\ &= \frac{\dot{\rho}^2}{\rho^4 \dot{\theta}^2} \end{aligned}$$

La première formule de Binet est donc démontrée, et la deuxième se démontre en utilisant la même méthode. En effet, d'après le cours :

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta$$

Or la formule annoncée impose que la composante de l'accélération sur \vec{e}_θ soit nulle. Montrons le donc, en remarquant que $\rho(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) = \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) = 0$, comme nous l'avons vu précédemment.

Ce problème étant réglé, intéressons-nous au problème radial en procédant de la même manière :

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 &= -\frac{(\rho^2 \dot{\theta})^2}{\rho^2} \left(\frac{\rho^2}{\rho^4 \dot{\theta}^2} \rho \dot{\theta}^2 - \frac{\rho^2}{\rho^4 \dot{\theta}^2} \ddot{\rho} \right) \\ &= -\frac{C^2}{\rho^2} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\ddot{\rho}}{\rho^2 \dot{\theta}^2} \right) \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \left(\frac{1}{\rho} \right)}{d\theta^2} &= \frac{d}{d\theta} \left(\frac{-\dot{\rho}}{\dot{\theta} \rho^2} \right) \\ &= -\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\rho}}{\dot{\theta} \rho^2} \right) \frac{1}{\dot{\theta}} \\ &= -\frac{1}{\dot{\theta}} \frac{\ddot{\rho} \dot{\theta} \rho^2 - \dot{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\theta})}{\dot{\theta}^2 \rho^4} \\ &= -\frac{\ddot{\rho}}{\rho^2 \dot{\theta}^2} \end{aligned}$$

Ce dernier calcul achève la démonstration des formules de Binet. Elles ne sont pas à connaître, mais les astuces et méthodes utilisées pour y aboutir sont fondamentales et doivent être maîtrisées.

Exercice 3. Système de N points matériels ($N \geq 2$)

Cet exercice s'intéresse à la mécanique d'un système \mathcal{S} de N points matériels en interaction et en mouvement dans un référentiel \mathcal{R} galiléen.

Chaque point sera noté M_i , où $1 \leq i \leq N$. De plus, aux notations habituelles, on ajoutera l'indice i lorsque la quantité considérée est relative au point i (par exemple, \vec{p}_i désigne la quantité de mouvement de M_i).

On définit le centre de masse C du système par

$$\left(\sum_i m_i\right)\vec{OC} = \sum_i m_i\vec{OM}_i$$

et on note

$$M = \sum_i m_i$$

1. On appelle quantité de mouvement du système la quantité

$$\vec{p} = \sum_i p_i$$

Exprimer simplement \vec{p} en fonction de M et de la vitesse \vec{V}_C de C.

En déduire l'existence d'un référentiel, que l'on notera \mathcal{R}^* , et que l'on appellera référentiel du centre de masse, en translation par rapport à \mathcal{R} et tel que la quantité de mouvement de \mathcal{S} soit nulle dans \mathcal{R}^* .

Désormais, les grandeurs cinétiques dans \mathcal{R}^* seront affectées d'une étoile.

2. Soit O et O' deux points quelconques. Exprimer $\vec{L}_{O'}$ en fonction de \vec{L}_O , de $\vec{O'O}$ et de \vec{p} , où en prendra les définitions suivantes pour le moment cinétique du système :

$$\begin{aligned}\vec{L}_{O'} &= \sum_i \vec{L}_{O'i} \\ \vec{L}_O &= \sum_i \vec{L}_{Oi}\end{aligned}$$

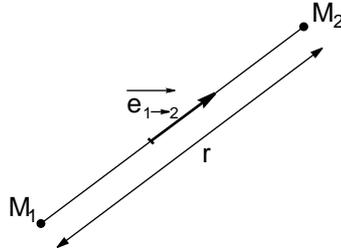
Exprimer $\vec{L}_{O'}^*$ en fonction de \vec{L}_O^* .

3. On suppose que chaque M_i est soumis aux forces extérieures $\vec{F}_{ext \rightarrow i}$ et aux forces exercées par chacun des points M_j ($j \neq i$), notées $\vec{F}_{j \rightarrow i}$.

Montrer que, pour un tel système, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{ext} = \sum_i \vec{F}_{ext \rightarrow i}.$$

4. Montrer que, si O est fixe dans \mathcal{R} , et que $\vec{F}_{i \rightarrow j}$ est colinéaire à $\overline{M_i M_j}$, $\frac{d\vec{L}_O}{dt}$ est égal au moment en O des forces extérieures.
5. On suppose désormais que $N=2$ et que $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ est colinéaire à $\overline{M_1 M_2}$.



Montrer que, à tout instant, la puissance \mathcal{P}_{int} des forces intérieures est indépendante du référentiel et vaut $\mathcal{P}_{int} = F\dot{r}$ où $F = \|\vec{F}_{1 \rightarrow 2}\|$. Il pourra être judicieux pour cela d'introduire le vecteur unitaire $\vec{e}_{1 \rightarrow 2}$.

Correction

1. Il faut évidemment revenir aux quantités connues, qui sont ici les quantités de mouvement \vec{p}_i :

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \sum_i \vec{p}_i \\ &= \sum_i m_i \vec{v}_i \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \overline{OM_i} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\left(\sum_i m_i \right) \overline{OC} \right) \\ &= M \vec{v}_C \end{aligned}$$

Ce résultat implique que la quantité de mouvement d'un système de plusieurs particules et, après généralisation au cas continu, d'un solide, se calcule comme celle d'un point matériel de masse la masse totale et de vitesse celle du centre de masse.

Par ailleurs, on remarque que la quantité de mouvement est nulle lorsque $\vec{v}_C = 0$. Il suffit donc de choisir pour \mathcal{R}^* le référentiel en translation à la vitesse \vec{v}_C par rapport à \mathcal{R}^* . On a alors $\vec{p}^* = M \vec{v}_C^* = 0$.

2. Là encore, il faut se raccrocher à ce qu'on connaît :

$$\begin{aligned}\vec{L}_{O'} &= \sum_i \vec{L}_{O'_i} \\ &= \sum_i m_i \overrightarrow{O'M_i} \wedge \vec{v}_i\end{aligned}$$

On nous demande d'exprimer ce moment cinétique en fonction, entre autres, du vecteur $\overrightarrow{O'O}$. Il faut donc faire apparaître le point O dans l'expression ci-dessus pour espérer répondre à la question :

$$\begin{aligned}\vec{L}_{O'} &= \sum_i m_i \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM_i} \right) \wedge \vec{v}_i \\ &= \overrightarrow{O'O} \wedge \sum_i m_i \vec{v}_i + \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{v}_i \\ &= \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{p} + \vec{L}_O\end{aligned}$$

Les calculs précédents sont valables dans tout référentiel, qu'il soit galiléen ou non. En particulier, ils le sont dans \mathcal{R}^* , ce qui fournit $\vec{L}_{O'}^* = \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{p}^* + \vec{L}_O^*$.

Par définition, $\vec{p}^* = 0$ donc $\vec{L}_{O'}^* = \vec{L}_O^*$; dans le référentiel du centre de masse, le moment cinétique d'un système de points matériel est indépendant du point O en lequel on le calcule.

3. Puisque $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}.$$

Or, dans un référentiel galiléen, $\frac{d\vec{p}_i}{dt}$ est égal à la somme des forces auxquelles est soumis M_i , qui sont ici extérieures et intérieures :

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_{ext \rightarrow i} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{p}}{dt} &= \underbrace{\sum_i \vec{F}_{ext \rightarrow i}}_{\vec{F}_{ext}} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i} \\ \frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{F}_{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i}\end{aligned}$$

Le second terme étant nul en vertu de la troisième loi de Newton, on a bien le résultat attendu ; il signifie que ce qui se passe à l'intérieur d'un système n'a aucune importance du point de vue de la quantité de mouvement. Seules comptent les actions extérieures.

4. On procède toujours de la même façon :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_i \vec{L}_{O_i} \right) \\ &= \sum_i \mathcal{M}_i \quad \text{d'après le théorème du moment cinétique} \\ &= \sum_i \left(\vec{\mathcal{M}}_{ext \rightarrow i} + \sum_{j \neq i} \vec{\mathcal{M}}_{j \rightarrow i} \right)\end{aligned}$$

Pour poursuivre, il faut encore appliquer la troisième loi de Newton, en remarquant que

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{j \rightarrow i} &= \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i} \\ &= -\overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{F}_{i \rightarrow j}\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{M}_{j \rightarrow i} + \mathcal{M}_{i \rightarrow j} = \overrightarrow{M_j M_i} \wedge \vec{F}_{i \rightarrow j}$, produit vectoriel nul puisque ces deux vecteurs sont parallèles.

Finalement, $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_{ext \rightarrow i} = \vec{\mathcal{M}}_{ext}$.

5. Par définition de la puissance, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{int} &= \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_2 + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_1 \\ &= \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \left(\frac{d\overrightarrow{OM}_2}{dt} - \frac{d\overrightarrow{OM}_1}{dt} \right)\end{aligned}$$

où O est un point fixe du référentiel dans lequel on fait le calcul.

On voit alors que $\mathcal{P}_{int} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \frac{d\overrightarrow{M_1 M_2}}{dt}$, ce qui permet de faire disparaître le point arbitraire O.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{int} &= \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \frac{d r \vec{e}_{12}}{dt} \\ &= \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \left(r \frac{d\vec{e}_{12}}{dt} + \dot{r} \vec{e}_{12} \right) \end{aligned}$$

Il reste à remarquer que $\frac{d\vec{e}_{12}}{dt}$ est orthogonal à $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ car $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ est colinéaire à \vec{e}_{12} et $\frac{d\vec{e}_{12}}{dt} \cdot \vec{e}_{12} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{e}_{12} \cdot \vec{e}_{12}) = \frac{1}{2} \frac{d1}{dt} = 0$.

En conclusion

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{int} &= \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{e}_{12} \dot{r} \\ &= F \dot{r} \end{aligned}$$

Ce résultat est à rapprocher de celui du 3. Ce qui se passe à l'intérieur d'un système de N points n'a pas d'influence sur la quantité de mouvement, mais on doit en tenir compte du point de vue de la puissance. Par exemple, lorsque une voiture freine, on peut voir le problème sous deux angles distincts. Soit donc le système voiture.

- Si on s'intéresse à la quantité de mouvement, c'est la force exercée par la route sur les roues qui influe sur la quantité de mouvement, et non celle des patins sur le disque, qui est une force intérieure.
- Si on adopte le point de vue "puissance", la force exercée par la route n'a plus d'influence puisque la vitesse des roues par rapport à la route est nulle (sauf bien sûr si la voiture dérape). Par contre, c'est la force exercée par les étriers qui est ici significative. Evidemment, ces deux points de vue sont équivalents, mais cet exemple montre les subtilités mises en jeu dans l'étude de systèmes non ponctuels déformables.

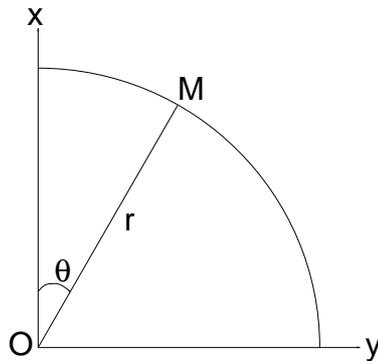
Exercice 4. Masse sur un cerceau

Un point matériel M de masse m peut glisser sans frottements sur un cerceau de rayon r. Il est repéré par son angle θ par rapport à la verticale.

Sachant que à $t=0$, $\dot{\theta} = 0$ et $\theta = 0$, pour quelle valeur de θ M décolle-t-il du cerceau ?

Correction

Pour mener à bien cet exercice, on peut commencer par se demander comment formuler de manière plus précise le décollement de M. On voit bien



qu'il correspond à une annulation de la réaction \vec{R} du cerceau sur M, et c'est de cette idée qu'il est commode de partir. Faisons donc un bilan des forces. M est soumis à son poids et la réaction \vec{R} , qui est normale au cerceau puisqu'il n'y a pas de frottements. La relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel galiléen du cerceau s'écrit donc :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$$

Remarquons ici que seule l'annulation de la réaction \vec{R} , qui est en permanence normale au cerceau, nous intéresse. Il faut choisir un repère dans lequel on puisse facilement projeter cette relation : le repère de Frénet est idéal car il exploite pleinement cette propriété de \vec{R} . Projetons donc dans ce repère en utilisant les formules sur les accélérations en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} mr\ddot{\theta} &= P \sin \theta \\ &= mg \sin \theta \\ mr\dot{\theta}^2 &= P \cos \theta - R \\ &= mg \cos \theta - R \end{aligned}$$

La première équation fournit, par une astuce classique, $mr\dot{\theta}\ddot{\theta} = mg\dot{\theta} \sin \theta$, c'est-à-dire, après intégration, et en tenant compte des conditions initiales :

$$\frac{mr\dot{\theta}^2}{2} = -mg \cos \theta + mg$$

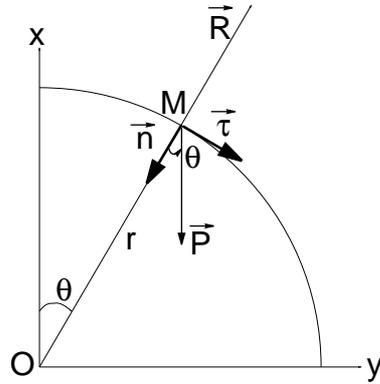
Injectons ce résultat dans la deuxième équation :

$$2(mg - mg \cos \theta) = mg \cos \theta - R$$

C'est-à-dire,

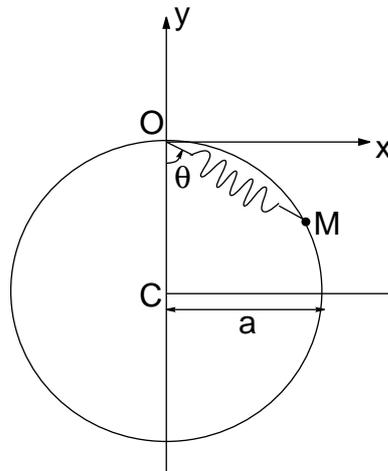
$$R = mg(3 \cos \theta - 2)$$

Dès lors, le décollement s'obtient pour $\cos \theta = \frac{2}{3}$, ou encore $\theta \approx 48,1^\circ$



Exercice 5. Masse sur un cerceau attachée à un ressort

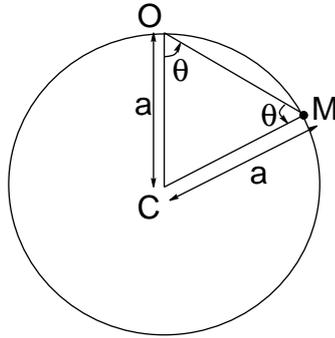
On considère dans cet exercice le système schématisé ci-dessous, où M est un point matériel de masse m glissant sans frottements sur le cerceau de rayon a . Le ressort est de raideur k et de longueur a au repos.



1. Exprimer OM et z en fonction de a et θ .
2. Calculer l'énergie potentielle E_p du système ressort, masse, terre et tracer la courbe $E_p(\theta)$.
3. Donner les points d'équilibre et leur stabilité.

Correction

1. Aidons-nous d'un schéma :



Le triangle COM est isocèle en C donc on a la relation simple

$$\begin{aligned} OM &= 2HO \\ &= 2a \cos \theta \end{aligned}$$

Par ailleurs, $z = -OM \cos \theta$ et, finalement,

$$z = -2a \cos^2 \theta$$

2. Les forces conservatives mises en jeu dans le système considéré sont le poids \vec{P} de la masse et la tension \vec{P} du ressort donc

$$\begin{aligned} E_p &= \underbrace{mgz}_{\text{pesanteur}} + \overbrace{\frac{1}{2}k(OM - a)^2}^{\text{ressort}} \\ &= -2mga \cos^2 \theta + \frac{1}{2}ka^2(2 \cos \theta - 1)^2 \\ &= a \left(2(ak - mg) \cos^2 \theta - 2ka \cos \theta + \frac{ka}{2} \right) \end{aligned}$$

3. Les positions d'équilibre sont celles en lesquelles $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} a(4(mg - ka) \sin \theta \cos \theta + 2ka \sin \theta) &= 0 \\ a \sin \theta (4(mg - ka) \cos \theta + 2ka) &= 0 \end{aligned}$$

θ étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, les positions d'équilibre sont $\theta = 0$ et θ tel que $\cos \theta = \frac{ka}{2(ka - mg)}$, que l'on note $\theta = \arccos \frac{ka}{2(ka - mg)}$ lorsque cela a un sens, c'est-à-dire si $ka < 2(ka - mg)$.

- Si $ka > 2(ka - mg)$, c'est-à-dire $ka < mg$ l'unique position d'équilibre est $\theta = 0$.

- Si $ka < 2(ka - mg)$, c'est-à-dire $ka > mg$, $\theta = \arccos \frac{ka}{2(ka - mg)}$ est une autre position d'équilibre.

Pour étudier la stabilité de ces positions d'équilibre, il reste maintenant à étudier le signe de $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}$ en chacune d'elles :

$$\begin{aligned}\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} &= a [\cos \theta (2ka + 4(mg - ka) \cos \theta) - 4 \sin^2 \theta (mg - ka)] \\ &= a [4(mg - ka)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2ka \cos \theta] \\ &= a [4(mg - ka)(2 \cos^2 \theta - 1) + 2ka \cos \theta]\end{aligned}$$

Ainsi, en $\theta = 0$, $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = 2a(2mg - ka)$, ce qui donne lieu à deux nouveaux cas de figure :

- Si $ka > 2mg$, $\theta = 0$ est un équilibre instable.
- Sinon, c'est un équilibre stable

Ce résultat est assez logique physiquement puisque, en $\theta = 0$, la pesanteur a tendance à maintenir M en bas du cerceau tandis que le ressort tend à l'écartier de cette position. Il est donc normal que la stabilité de l'équilibre soit liée à la comparaison entre l'importance de ces deux facteurs, l'un étant "stabilisant" et l'autre "déstabilisant".

Supposons maintenant que $ka < 2(ka - mg)$ et étudions la seconde position d'équilibre. En $\theta = \arccos \frac{ka}{2(ka - mg)}$,

$$\begin{aligned}\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} &= a \left[4(mg - ka) \left(\frac{2k^2 a^2}{4(ka - mg)^2} - 1 \right) + 2ka \frac{ka}{2(ka - mg)} \right] \\ &= a \left[\frac{2k^2 a^2}{mg - ka} + 4(ka - mg) - \frac{k^2 a^2}{mg - ka} \right] \\ &= a(mg - ka) \left(\frac{k^2 a^2}{(mg - ka)^2} - 4 \right) \\ &= \underbrace{a(mg - ka)}_{<0} \left(\frac{ka}{mg - ka} + 2 \right) \left(\frac{ka}{mg - ka} - 2 \right)\end{aligned}$$

Il reste à étudier le signe de chacun des deux derniers facteurs. Par des calculs élémentaires, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{ka}{mg - ka} + 2 > 0 &\Leftrightarrow ka > 2mg \\ \frac{ka}{mg - ka} - 2 > 0 &\Leftrightarrow ka < \frac{2}{3}mg\end{aligned}$$

Puisque $ka > mg$, $ka > \frac{2}{3}mg$ donc le dernier terme est négatif.

En conclusion, cette position d'équilibre est stable si $ka > 2mg$ et instable sinon.

Exercice 6. Etude d'un amortisseur

On se placera dans le référentiel terrestre supposé galiléen et on rapporte l'espace à un système d'axes orthonormé direct $(O, \vec{v}, \vec{j}, \vec{k})$, \vec{k} étant la verticale ascendante.

Une particule P de masse m est maintenue dans le plan (O, \vec{v}, \vec{j}) par un pivot sans frottement et l'étude se fera dans ce plan, orienté positivement par \vec{k} .

1. Question de cours : exprimer \vec{v} et \vec{a} , vitesse et accélération de P, dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$.
2. Désormais, P est attachée à l'extrémité d'un ressort de masse négligeable, de longueur l_0 au repos et de raideur k.
L'autre extrémité du ressort est attachée en O et l'ensemble peut pivoter dans le plan (O, \vec{v}, \vec{j}) . Enfin, on place un amortisseur exerçant sur P une force $\vec{f} = -\alpha(\vec{v} \cdot \vec{e}_\rho)\vec{e}_\rho$, où α est un réel strictement positif.
En utilisant la relation fondamentale de la dynamique, donner les deux équations différentielles du mouvement.
3. Montrer que $\rho^2\dot{\theta} = cste = \rho_0^2\dot{\theta}_0^2$ (les quantités affectées d'un indice 0 correspondent aux conditions initiales).
4. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique et en remarquant que la puissance de la force d'amortissement tend vers 0 lorsque le temps tend vers l'infini, montrer que la trajectoire de P au bout d'un temps très long est un cercle de rayon ρ_∞ .
Déterminer l'équation vérifiée par ρ_∞ en fonction des conditions initiales.

Correction

1. Il suffit d'utiliser les formules du cours en les simplifiant du fait que le mouvement est plan :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{k} \\ &= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ \vec{a} &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{k} \\ &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

2. Remarquons avant tout que la projection de la relation fondamentale de la dynamique sur l'axe \vec{k} ne nous donne d'autres informations que $0=0$. Intéressons-nous donc aux axes \vec{e}_ρ et \vec{e}_θ .

La particule est soumise à la force $\vec{F}_{res} = -k(\rho - l_0)\vec{e}_\rho$ exercée par le ressort et à $\vec{f} = -\alpha(\vec{v} \cdot \vec{e}_\rho)\vec{e}_\rho$.

Il suffit dès lors d'écrire la relation fondamentale de la dynamique en projection sur chacun des axes \vec{e}_ρ et \vec{e}_θ , en utilisant les formules du cours donnant l'accélération en coordonnées cylindriques.

$$\begin{aligned} m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) &= -k(\rho - l_0) - \alpha\dot{\rho} \\ m(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) &= 0 \end{aligned}$$

3. L'astuce est classique : elle consiste à remarquer que

$$2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})$$

Or la deuxième équation de la question précédente montrait que $m(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) = 0$, donc $\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) = 0$, c'est-à-dire que $\rho^2\dot{\theta}$ reste constant au cours du temps, donc que $\rho^2\dot{\theta} = r_0^2\dot{\theta}_0$.

On nous demande ensuite de déterminer l'équation différentielle vérifiée par ρ . Pour cela, la démarche la plus naturelle est de partir de l'une des deux équations de la question précédente et d'y éliminer les termes en θ . Or, nous venons de montrer que $\dot{\theta} = \frac{\rho_0^2\dot{\theta}_0}{\rho^2}$, ce qui nous permet de remplacer $\dot{\theta}$ dans la première équation :

$$\begin{aligned} m\left(\ddot{\rho} - \frac{\rho_0^4\dot{\theta}_0^4}{\rho^3}\right) &= -k(\rho - l_0) - \alpha\dot{\rho} \\ \ddot{\rho} + \frac{\rho}{m}\dot{\rho} + \frac{k}{m}(\rho - l_0) - \frac{\rho_0^4\dot{\theta}_0^4}{\rho^3} &= 0 \end{aligned}$$

4. On cherche un rayon "limite" atteint au bout d'un temps très grand. Pour répondre à ce genre de questions, il est commun de supposer que, à la limite, on a $\dot{\rho} \rightarrow 0$ et $\ddot{\rho} \rightarrow 0$. Cela revient à dire que non seulement le rayon tend vers un rayon limite mais aussi (et c'est mathématiquement discutable, mais enfin...) que le mouvement est stable autour de ce rayon.

Cette supposition faite, il suffit de regarder l'équation différentielle vérifiée par ρ pour en déduire que l'on a :

$$\frac{k}{m}(\rho_\infty - l_0) - \frac{\rho_0^4\dot{\theta}_0^4}{\rho_\infty^3} = 0$$

1.4 Problème (Mines 96)

Un pendule simple non amorti

On considère un point matériel M de masse m accroché à un point fixe O par l'intermédiaire d'un fil inextensible de longueur l et de masse nulle. L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = g\vec{v}$, où on prendra $g = 9,81m.s^{-2}$, \vec{v} étant le vecteur unitaire descendant de l'axe Ox.

On appelle \vec{u} le vecteur unitaire colinéaire et de même sens que \overrightarrow{OM} et on note $\theta = (\vec{v}, \vec{u})$.

Dans cette première partie, on négligera tout frottement.

A $t=0$, on lâche la masse à partir d'un angle $\theta_0 = \theta(t=0)$

Cas des petites oscillations

Dans cette sous-partie, on fera l'approximation des petits angles $\sin \theta \approx \theta$.

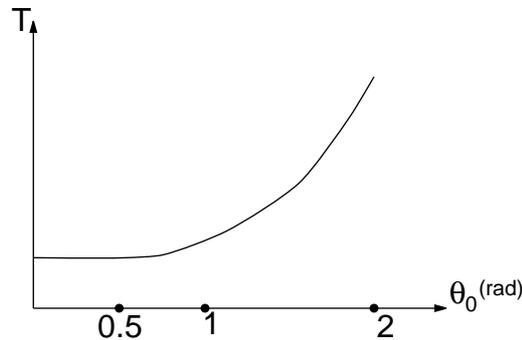
1. Montrer que le mouvement est plan
2. Etablir l'équation différentielle vérifiée par θ
3. Montrer que, dans le cas des petits angles, on peut approcher l'équation obtenue par celle d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 dont on donnera l'expression en fonction de l et θ :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0$$

En déduire $\theta(t)$

Etude aux grands angles

1. Calculer l'énergie potentielle de pesanteur du pendule en fonction de x, cote du point M, puis de θ .
2. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, donner l'équation différentielle reliant $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$, θ , θ_0 et les paramètres du système.
3. Donner l'expression de la période $T(\theta_0)$ du pendule sous forme d'une intégrale dépendant de θ_0 et des paramètres. On ne demande pas de calculer cette intégrale, que l'on pourra obtenir en se plaçant dans l'intervalle de temps où $\theta > 0$ et $\frac{d\theta}{dt} > 0$ et en remarquant que $\frac{T}{4} = \int_0^{T/4} dt$
4. Une intégration numérique fournit la courbe ci-dessous. La commenter.



L'oscillateur amorti

En réalité, lorsque l'on mesure expérimentalement $\theta(t)$, on constate que l'amplitude du pendule diminue lentement. On interprète ce résultat par l'existence de frottements que l'on modélise par $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$, où \vec{v} est la vitesse de M et $\alpha > 0$.

Equation du mouvement

1. En se limitant aux petits angles, écrire l'équation différentielle vérifiée par θ sous la forme

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = 0$$

2. Quelle est la signification physique de τ ?

Etude du mouvement

1. On suppose que $\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2 < 0$. On peut alors montrer que l'expression de θ est de la forme

$$\theta(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t + \varphi),$$

où A et φ sont des constantes qu'il n'est pas nécessaire de déterminer et $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}$. Cela signifie que le mouvement est pseudo-périodique, de pseudo-période $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Une autre caractéristique de ce type de mouvements est le décrément logarithmique $\delta = \ln \frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}$, que l'on demande d'exprimer en fonction de T et τ .

2. Quelle est la signification physique de δ ?

Solution

Un pendule simple non amorti

Cas des petites oscillations

1. Avant toute chose, il convient de préciser les forces auxquelles est soumis le pendule.

– Son poids $\vec{P} = mg\vec{v}$

– La tension du fil $\vec{T} = -T \cos \theta \vec{v} - T \sin \theta \vec{j}$

L'idée est d'utiliser le théorème du moment cinétique pour montrer qu'un pendule lâché dans un plan et soumis à des forces contenues dans ce plan reste dans ce plan.

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{P} + \vec{T}) \\ &= \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} \quad \text{car } \vec{T} \text{ et } \overrightarrow{OM} \text{ sont colinéaires} \\ &= -mgy\vec{e}_z^{\rightarrow}\end{aligned}$$

En intégrant, on obtient

$$\overrightarrow{L_O(t)} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ \int_0^t mgy dt + c \end{pmatrix},$$

a, b et c étant des constantes.

Or, à $t=0$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{L_O(0)} &= m \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{pmatrix} \\ &= m \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{car M est lâché sans vitesse initiale} \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi, $\overrightarrow{L_O(t)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \int_0^t mgy dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_O(t) \end{pmatrix}$. C'est-à-dire que $m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$

est à chaque instant colinéaire à \vec{e}_z^{\rightarrow} , donc que \overrightarrow{OM} est perpendiculaire à \vec{e}_z^{\rightarrow} .

En d'autres termes, le mouvement du pendule se fait dans le plan perpendiculaire à \vec{e}_z^{\rightarrow} .

2. Etant donné le type de mouvement, il est naturel de continuer avec le théorème du moment cinétique en remarquant que $mgy\vec{e}_z = mgl \sin \theta \vec{e}_z$ et en se plaçant dans un repère cylindrique.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_0}{dt} &= \frac{d}{dt} m \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ l\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \\ &= ml^2 \ddot{\theta} \vec{e}_z \end{aligned}$$

Finalement, $ml^2 \ddot{\theta} = -mgy = -mgl \sin \theta$ et :

$$l\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0.$$

3. Si l'on suppose les élongations angulaires faibles, on peut remplacer $\sin \theta$ par θ , ce qui fournit l'équation classique de l'oscillateur harmonique de pulsation ω_0 , $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$, où $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Les solutions sont de la forme $\theta(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$, où A et B sont des constantes à déterminer.

Or $\theta(t=0) = A = \theta_0$

et $\dot{\theta}(t=0) = B\omega_0 = 0$, donc $\theta(t) = \theta_0 \cos \omega_0 t$.

Etude aux grands angles

1. Prenons par exemple l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur en $x = 0$. Alors $E_P(x) = -mgx$ (le signe moins signifie que l'énergie diminue quand la masse descend).

Puisque $x = l \cos \theta$, on a finalement $E_P(\theta) = -mgl \cos \theta$

2. L'énergie mécanique est conservée car le système n'est soumis qu'à des forces conservatives. Ainsi,

$$\begin{aligned} E_m &= -mgl \cos \theta + \frac{1}{2} m (l\dot{\theta})^2 \\ &= cste \\ &= -mgl \cos \theta_0. \end{aligned}$$

Ce qui peut s'écrire $\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0)$.

3. Suivons les instructions de l'énoncé et calculons $T/4$ en nous plaçant dans un intervalle de temps où θ varie de 0 à θ_0 , intervalle de largeur $T/4$.

$$\frac{T}{4} = \int_0^{T/4} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{T/4} \frac{dt}{d\theta} d\theta \\
&= \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\dot{\theta}} \\
&= \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}
\end{aligned}$$

car $\dot{\theta} > 0$ donc $\dot{\theta} = \sqrt{\dot{\theta}^2}$

Ainsi, $T = 2\sqrt{\frac{2l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$ L'astuce utilisée dans cette question consistant à remplacer dt par $dt \frac{d\theta}{d\theta}$ peut paraître un peu tirée par les cheveux, mais elle revient très souvent.

4. Quant à la courbe, on remarque que, pour θ_0 petit devant 1, T est effectivement quasiment constant. Par contre, pour θ_0 grand devant 1, la période varie beaucoup quand θ_0 varie.

L'oscillateur amorti

Equation du mouvement

1. Nous allons de nouveau appliquer le théorème du moment cinétique en O. Cette fois,

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}_0}{dt} &= \vec{OM} \wedge (\vec{P} + \vec{T} + \vec{f}) \\
\text{Travaillons en cylindrique} &= \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} mg \cos \theta + 0 + 0 \\ -mg \sin \theta + 0 - \alpha v \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= (-lmg \sin \theta - \alpha l^2 \dot{\theta}) \vec{e}_z
\end{aligned}$$

D'autre part on a toujours $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = ml^2 \ddot{\theta} \vec{e}_z$ donc

$$\begin{aligned}
ml^2 \ddot{\theta} + \alpha l^2 \dot{\theta} + mgl \sin \theta &= 0 \\
\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \sin \theta &= 0
\end{aligned}$$

Si on se limite aux petits angles, on obtient finalement

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = 0,$$

avec $\tau = \frac{2m}{\alpha}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

2. On s'aperçoit alors que τ est inversement proportionnel à α , qui est relatif à l'importance des frottements. Plus les frottements sont grands plus τ est petit, c'est-à-dire plus le système s'amortit vite.

Etude du mouvement

1. On admet ici que $\theta(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t + \varphi)$ où $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}$. Alors,

$$\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)} = \frac{Ae^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t + \varphi)}{Ae^{-\frac{t+T}{\tau}} \cos(\omega(t+T) + \varphi)} // \text{ Comme } T = \frac{2\pi}{\omega}, \cos(\omega(t+T) + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi) \text{ donc } \delta = \frac{T}{\tau}.$$
2. Ce décrétement logarithmique représente la vitesse à laquelle décroît l'amplitude du mouvement : il n'est pas surprenant qu'elle soit proportionnelle à $\frac{1}{\tau}$, donc à α .

Chapitre 2

Thermodynamique

La thermodynamique est l'étude d'un système pour lequel la température joue un rôle significatif. Evidemment, cette notion est toute relative car, selon le degré d'approximation accepté, la température pourra intervenir ou non dans les équations. C'est souvent une question de contraintes : il est toujours préférable d'être moins approximatif, sauf quand les contraintes ne le permettent pas. Heureusement, les énoncés des exercices ou problèmes de classes préparatoires ne ménagent aucune ambiguïté en la matière : soit la température est donnée et il faut en tenir compte, soit elle ne l'est pas...

2.1 Les concepts de base

Plus concrètement, la thermodynamique s'intéresse principalement à l'étude des gaz et des liquides, parce que l'agitation de leurs constituants (les atomes et les molécules), liée à la température, influence de manière décisive leur comportement. Avant de préciser cette affirmation, donnons quelques définitions indispensables à la pratique de la thermodynamique.

2.1.1 Quelques définitions

Les niveaux d'étude

La matière est constituée d'atomes, formant éventuellement des molécules. L'idéal, lorsqu'on cherche par exemple à modéliser le comportement d'un gaz, serait de pouvoir isoler, en équations, chacun de ses constituants et d'en prévoir analytiquement le comportement. Malheureusement, le nombre de molécules ou d'atomes mis en jeu dans une telle modélisation est si important qu'il interdirait toute résolution avec un degré d'approximation acceptable (1 litre d'air à 1 bar et 20°C contient environ $6,02 \cdot 10^{23}$ atomes). Comme de

plus les interactions entre eux ne sont connues qu'approximativement, il est indispensable de trouver d'autres approches de travail. Ce niveau d'étude, le niveau *microscopique* doit donc être abandonné dans notre cadre de travail.

Une autre approche est le niveau *macroscopique*, où on fait abstraction de la structure microscopique du système étudié. On se contente alors d'observations faites, pour ainsi dire, à l'oeil nu. Par exemple, la température telle qu'on la mesure avec un thermomètre est une grandeur macroscopique : elle traduit une agitation moléculaire (donc microscopique) qui ne se manifeste à nous *qu'en moyenne*. De la même façon, la vitesse du vent, mesurée avec un anémomètre est une grandeur macroscopique qui ne représente que la moyenne des vitesses des molécules d'air. On voit dans ces deux exemples, et c'est une constatation de portée générale, que le niveau macroscopique est une manifestation statistique de ce qui se passe au niveau microscopique.

Dès lors, un problème se pose. En effet, les problèmes physiques sont généralement modélisés à travers des équations impliquant dérivations, intégrales et différentielles. Que signifie par exemple la dérivée $\frac{d\rho}{dr}$ de la masse volumique d'un gaz lorsqu'on se place au niveau microscopique ? Pas grand chose ! Au niveau microscopique on considère le gaz comme l'ensemble des atomes ou molécules le constituant : la densité est donc nulle dans le vide séparant les atomes et très élevée au sein des atomes. Elle est surtout discontinue (donc non dérivable !) à l'interface entre le vide et l'intérieur de l'atome... Et au niveau macroscopique ? Eh bien la réponse est immédiate : la notion de dérivation a certes un sens, mais son utilisation est absurde. Car, les ordres de grandeurs des distances mises en jeu à l'échelle macroscopique (c'est-à-dire par exemple la distance devant séparer deux thermomètres pour qu'ils mesurent deux températures significativement différentes) sont bien trop importants pour qu'une approche différentielle (c'est-à-dire mettant en jeu des variations infinitésimales) n'ait un intérêt.

La résolution de ce problème nécessite donc la définition d'un nouveau niveau d'étude, que l'on appelle *mésoscopique*, et qui peut être vu comme l'intermédiaire entre le microscopique et le macroscopique. C'est en fait un niveau d'observation assez théorique, et en tout cas de signification moins intuitive que ceux introduits plus haut. Il est caractérisé par des échelles de distance telles que le volume d'étude soit suffisamment grand par rapport à la distance moyenne séparant les molécules, et suffisamment petit pour que la notion de variation infinitésimale y soit applicable. Cela revient dans une certaine mesure à considérer le milieu comme continu, ce qui est une hypothèse forte que nous supposons toujours vérifiée dans la suite.

Les grandeurs thermodynamiques

Comme pour l'étude de tout système physique, celle d'un système thermodynamique passe avant tout par la définition de quantités permettant de le caractériser et d'en modéliser le comportement : on les appelle *variables d'état*. Dans le cas d'un gaz, par exemple, ces quantités sont le plus souvent la pression, la température et le volume molaire. Mais il existe un nombre potentiellement infini de variables d'état : la masse, la masse volumique, la vitesse du fluide, la chaleur massique, ... Nous verrons dans ce chapitre quelles sont les grandeurs les plus communément utilisées.

Pour un système donné, il existe deux types de grandeurs d'état :

- Les grandeurs extensives : ce sont celles qui sont relatives au système pris dans son ensemble, telles que sa masse ou son volume. Si l'on considère deux systèmes, la réunion de ces deux systèmes a pour variables d'états extensives les sommes des variables d'états extensives des deux sous-systèmes.
- Les grandeurs intensives : elles sont définies en un point du système et, contrairement aux grandeurs extensives, ne sont pas additives. La masse volumique, par exemple, est une grandeur intensive.

Les équations d'état

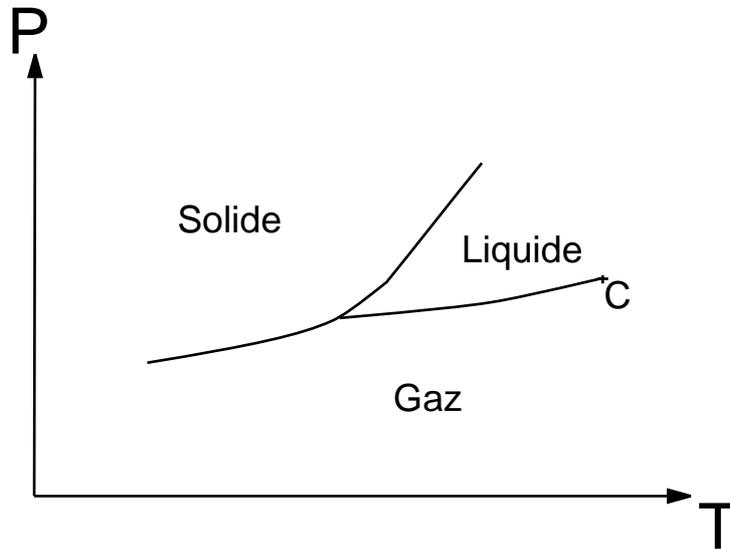
Ce sont, pour ainsi dire, elles qui justifient la définition des variables d'état. Ce sont des relations vérifiées entre elles par les diverses variables d'état d'un système. Par exemple, pour un gaz de volume molaire V_m , on écrira souvent : $PV_m = RT$ où R est une constante. Tous les problèmes de thermodynamiques mettent en jeu les équations d'état, soit qu'on souhaite les déterminer, soit qu'on les exploite pour en déduire des résultats.

2.1.2 L'état gazeux

Introduction : les états de la matière

Il est usuel de classer les états de la matière en trois catégories : solides, liquides et gaz. Cette classification peut se visualiser sur le diagramme ci-dessous, la température étant en abscisse, et la pression en ordonnée.

De nombreux critères justifient la distinction faite entre trois états d'un même système. Par exemple, un gaz dans les conditions normales de température et de pression contient de l'ordre de 10^{19} atomes par cm^3 . Pour les liquides et les solides, l'ordre de grandeur est d'au moins 10^{22} *atomes.cm⁻³*, soit 1000 fois plus. Cette différence d'ordre de grandeur entraîne une différence considérable sur la façon dont interagissent les molécules entre elles,



selon qu'elles sont en phase gazeuse, liquide ou solide. Les approximations utilisées pour tenir compte de ces interactions sont donc bien différentes. Nous verrons ainsi que, pour un gaz, il est souvent possible de négliger les interactions à distance entre les molécules, ce qui n'aurait pas de sens dans l'étude d'un solide (puisque ce sont ces interactions même qui en font un "solide"!).

Notion de pression

La notion de pression est assez intuitive, dans la mesure où nous en ressentons les manifestations "au quotidien". La douleur ressentie au niveau des tympans lorsque l'on plonge en profondeur, ou bien la vapeur qui s'échappe d'une cocotte minute lorsqu'on en retire la soupape sont des phénomènes liés à des différences de pression. Tous deux peuvent être interprétés par l'existence d'une force (celle qu'applique l'eau sur les tympans ou celle qu'applique la vapeur dans la cocotte sur la vapeur présente dans la soupape), appelée force de pression.

Cette force peut se caractériser comme suit. Considérons un élément de surface ds centré en M , de vecteur normal \vec{n} en contact avec un fluide (qui peut être gazeux ou liquide). Ce fluide exerce sur ds une force de pression ayant une composante normale à ds , $d\vec{F}_n = P(M) ds \vec{n}$, où $P(M)$ est, par définition, la pression du fluide en M . La pression s'exprime en Pascal ($1Pa = 1N.m^{-2}$) ou en bar ($1bar = 10^5 Pa$)

Cette définition, qui n'est pas la seule possible a le mérite de permettre une certaine généralité. Elle n'affirme *pas* que la force est normale à la surface, mais seulement qu'elle admet une composante normale dont la norme est liée à la grandeur $P(M)$. Et, en effet, il n'est pas toujours acquis que cette force soit normale : il faudrait pour cela supposer que le fluide est au repos, c'est-à-dire que sa vitesse macroscopique est nulle.

Il faut bien voir que, à ce stade, nous n'avons pas fait beaucoup avancé les choses. Nous avons défini la pression comme un coefficient multiplicateur défini à partir d'une force. Celle-ci est observable, donc la pression aussi. Mais il reste à savoir d'une part comment s'explique l'existence de cette force et d'autre part quels sont les modèles envisageables pour en prévoir la valeur en fonction des variables d'état du fluide.

Modélisation d'un gaz : le cas du gaz parfait monoatomique

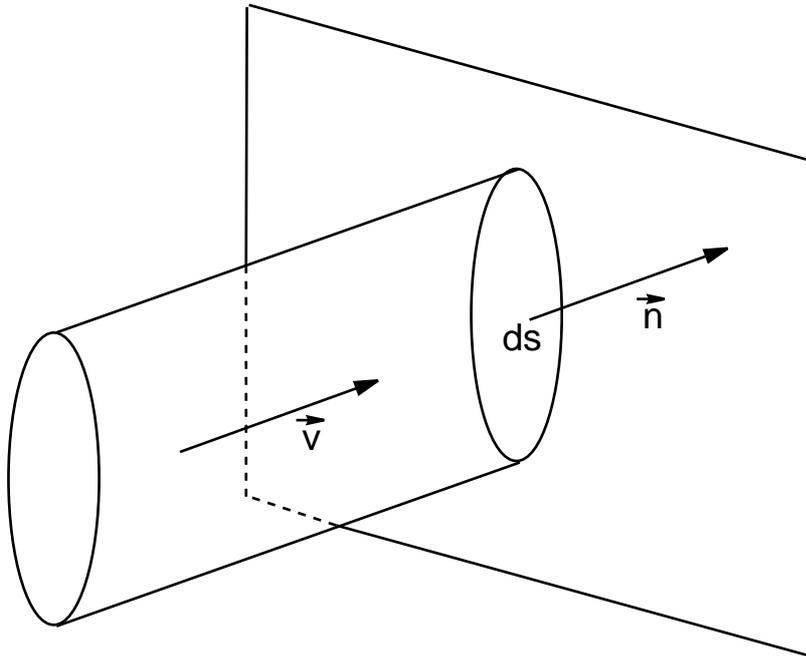
L'existence d'une force de pression est liée au mouvement des particules constituant le fluide, que ces particules soient des atomes ou des molécules. En effet, on sait qu'à toute température non nulle (sur l'échelle de Kelvin, telle que $T(K) = T(^{\circ}C) + 273$), les constituants de la matière sont soumis à une agitation permanente d'autant plus intense que la température est élevée. Lorsqu'ils viennent percuter une paroi, ils rebondissent, exerçant sur elle, de part le principe de la conservation de mouvement, une force. Nous allons préciser ces affirmations dans le cadre de la théorie des gaz parfaits monoatomiques.

Un gaz est dit parfait s'il peut être modélisé par un ensemble de constituants n'ayant aucune interaction à longue distance. C'est-à-dire que la seule interaction prise en compte dans le modèle sera une interaction de courte distance : le choc, qui pourra être vu comme un choc entre deux boules de billards. C'est une simplification très forte, bien sûr, et qui n'a de sens que si le gaz auquel on l'applique est de pression faible. En effet, ce modèle est d'autant plus proche de la réalité que la distance moyenne entre constituants est élevée, car plus les molécules sont éloignées les unes des autres, moins leurs interactions à distance pèsent par rapport aux chocs. Un gaz monoatomique est évidemment un gaz dont les constituants sont des atomes, et non des molécules composées. Si l'on introduit cette hypothèse, c'est dans un souci supplémentaire de simplification. car nous ferons intervenir dans notre modèle l'énergie cinétique des constituants du gaz. Celle-ci est uniquement liée à leur vitesse dans le cas monoatomique (parce que les atomes peuvent, à ce niveau, être considérés comme des particules ponctuelles). A l'opposé, dans le cas moléculaire, il faudrait prendre en compte les vibrations internes de la molécule, beaucoup plus complexes. Nous nous limiterons donc dans ce

qui suit au cas du gaz parfait monoatomique.

Considérons donc un gaz parfait monoatomique enfermé dans une enceinte. Nous supposons ce gaz au repos, c'est-à-dire sans mouvement d'ensemble, et à l'équilibre thermodynamique. De plus, nous supposons que les interactions entre le gaz et les parois de l'enceinte sont limitées aux chocs. On note n le nombre de particules de gaz par unité de volume et $n_{\vec{v}}$ le nombre de particules par unité de volume ayant une vitesse \vec{v} . On se place au voisinage d'une paroi : nous allons étudier l'action du gaz sur cette portion de paroi.

Soit un temps d'observation δt , choisi très supérieur au temps de choc. Soit un élément de surface ds de la paroi, centré en M , de normale \vec{n} orientée vers l'extérieur de l'enceinte. Quelle est, pendant le temps δt , la quantité de mouvement transmise à la paroi par le gaz ? Pour répondre à cette question, il faut commencer par répertorier toutes les particules qui vont avoir un choc avec la paroi pendant le temps δt . Pour une vitesse \vec{v} donnée, ce sont toutes les particules de vitesse \vec{v} et contenues dans le cylindre de base ds et de génératrice le vecteur $\delta t \vec{v}$, représenté sur le schéma ci-dessous.



Il va donc y avoir $n_{\vec{v}} V_{cyl}$ chocs. Or le volume du cylindre est $\delta t \vec{v} \cdot \vec{n} ds$, que nous noterons $\delta t v_n ds$. Le nombre de chocs pendant le temps δt par des atomes de vitesse \vec{v} est donc $n_{\vec{v}} \delta t v_n ds$. La quantité de mouvement

correspondant à ce flux d'atomes s'obtient en multipliant par la quantité de mouvement de chacun d'eux :

$$\delta \vec{p}_{\vec{v}} = n_{\vec{v}} \delta t v_n ds m \vec{v}.$$

Mais nous cherchons la quantité de mouvement totale, qui s'obtient en faisant la somme sur toutes les vitesses possibles :

$$\begin{aligned} \delta \vec{p} &= \sum_{\vec{v}} n_{\vec{v}} \delta t v_n ds m \vec{v} \\ &= ds \delta t m \sum_{\vec{v}} n_{\vec{v}} v_n \vec{v} \end{aligned}$$

Nous avons supposé au début que le gaz était sans mouvement d'ensemble, ce qui implique que la répartition des vitesses est isotrope. Ainsi, en moyenne, il y a dans le cylindre considéré et pour un module v donné, autant de particules se dirigeant dans chaque direction. Chaque vecteur vitesse peut se décomposer comme la somme $\vec{v} = (v_n \vec{n} + v_t \vec{t} + v_\tau \vec{\tau})$ où \vec{t} et $\vec{\tau}$ sont deux vecteurs unitaires tangents à ds , ce qui donne à l'équation précédente la forme :

$$\delta \vec{p} = ds \delta t m \sum_{v_n} \sum_{v_t} \sum_{v_\tau} n_{v_n, v_t, v_\tau} (v_n \vec{n} + v_t \vec{t} + v_\tau \vec{\tau})$$

Par isotropie du milieu, on a $n_{v_n, -v_t, v_\tau} = n_{v_n, v_t, v_\tau}$ et $n_{v_n, v_t, -v_\tau} = n_{v_n, v_t, v_\tau}$. Ainsi, dans la somme ci-dessus, les termes en \vec{t} , de même que ceux en $\vec{\tau}$, s'annulent. A priori, il serait logique que ceux en \vec{n} s'annulent aussi, mais nous n'incluons dans cette somme que les vitesses correspondant à des particules se dirigeant vers la paroi : il n'y a donc pas de compensation.

Dès lors, la somme se simplifie considérablement et s'écrit :

$$\delta \vec{p} = ds \delta t m \sum_{v_n} n_{v_n} v_n^2 \vec{n}$$

Si l'on privilégie le module, on obtient :

$$\delta \vec{p} = \frac{1}{2} ds \delta t m \sum_{\|v\|} n_{\|v\|} v_n^2 \vec{n}$$

L'introduction du facteur 1/2 est liée au fait que la somme sur tous les modules compte aussi les particules s'éloignant de la paroi, tandis que nous ne voulons prendre en compte que celle s'en approchant. Cette formule nous donne la quantité de mouvement de l'ensemble des particules destinées à

frapper la paroi *avant* le choc. Il nous faut connaître aussi cette grandeur *après* le choc, afin d'en déduire la quantité de mouvement transférée des particules à la paroi. Ce calcul est tout à fait analogue à la démarche suivie précédemment. Nous pouvons en effet continuer à supposer, après le choc, que les vitesses sont réparties de manière isotrope. On a donc :

$$\delta \vec{p} = \frac{1}{2} ds \delta t m \sum_{\|v\|} n_{\|v\|} v_n^2 (-\vec{n})$$

Ainsi, pendant le temps δt , la quantité de mouvement transférée par la paroi aux atomes est égale à :

$$\delta \vec{p}' - \delta \vec{p} = ds \delta t m \sum_{\|v\|} n_{\|v\|} v_n^2 \vec{n}$$

Il nous faut encore invoquer l'isotropie pour formuler cette équation de manière plus agréable. Car il n'est pas satisfaisant qu'elle fasse intervenir v_n , grandeur difficilement mesurable. Il serait préférable de mettre plutôt en jeu le module v de la vitesses des particules, car nous verrons qu'il est directement lié à la température du milieu. Or, pour un module v donné, $v^2 = v_n^2 + v_t^2 + v_\tau^2$. Le milieu étant supposé isotrope, il n'y a pas de raison pour que, en moyenne, l'une des trois directions correspondant à cette décomposition soit privilégiée par rapport aux autres. Par conséquent :

$$\sum_{\|v\|} n_{\|v\|} v_n^2 = \sum_{\|v\|} n_{\|v\|} v_t^2 = \sum_{\|v\|} n_{\|v\|} v_\tau^2,$$

et donc :

$$\begin{aligned} \sum_{\|v\|} n_{\|v\|} v^2 &= \sum_{\|v\|} n_{\|v\|} (v_n^2 + v_t^2 + v_\tau^2) \\ &= 3 \sum_{\|v\|} n_{\|v\|} v_n^2 \end{aligned}$$

On en déduit que : $\delta \vec{p}' - \delta \vec{p} = \frac{1}{3} ds \delta t m \sum_{\|v\|} n_{\|v\|} v^2 \vec{n}$.

Récapitulons. Nous avons évalué la quantité de mouvement transmise par le gaz à la paroi pendant le temps δt sur la surface ds . On voit, sans grande surprise, qu'elle est proportionnelle à ds , à δt et à m . Quant à la somme, son interprétation demande quelques développements supplémentaires. Elle est liée à l'énergie des particules constituant le gaz.

Nous avons vu dans le chapitre Mécanique que l'énergie cinétique d'un système de particules ponctuelles est la somme des énergies cinétiques de ces

particules. L'énergie cinétique d'un gaz au repos est appelée *énergie interne* et s'écrit $U = \sum \frac{1}{2}mv^2$, la somme portant sur toutes les particules et v étant la vitesse de chaque particule. On peut, au lieu de faire la somme sur l'ensemble des particules, la faire sur l'ensemble des modules des vitesses de ces particules, ce qui fournit $U = \sum_{\|v\|} \frac{1}{2}mn_{\|v\|}v^2$.

En rapprochant ce résultat de celui exprimant la variation de quantité de mouvement, on en déduit que :

$$\frac{\delta \vec{p}' - \delta \vec{p}}{\delta t} = \frac{2}{3} ds U \vec{n}$$

Or, si δt est suffisamment petit, le quotient du premier membre peut être vu comme la quantité de mouvement transférée par le gaz à la paroi par unité de temps. C'est donc la force exercée par le gaz sur la surface élémentaire ds de la paroi (en effet, la relation fondamentale de la dynamique affirme que $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$).

Ainsi, $d\vec{F} = \frac{2}{3} ds U$ et :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{F}}{ds} &= \frac{2}{3} U \vec{n} \\ P &= \frac{2}{3} mU \end{aligned}$$

Nous admettrons ici que la température d'un gaz parfait est liée à son énergie cinétique par la relation $T = \frac{2}{3k_B} \frac{U}{n}$, où $k_B = 1.38.10^{-23} J.K^{-1}$ est appelée constante de Boltzmann. Cette définition, bien qu'elle soit ici introduite sans justification, peut se comprendre intuitivement : on s'attend en effet à ce que la température d'un gaz soit liée, du fait de l'agitation thermique, à l'énergie cinétique moyenne des particules le constituant.

On obtient finalement :

$$P = nk_B T$$

Dans cette formule, n est le nombre de particules par unité de volume. Notons N le nombre de moles contenus dans le gaz et V le volume du gaz. Alors $n = \frac{N\mathcal{N}_a}{V}$, où $N\mathcal{N}_a$ est le nombre d'Avogadro. Notons pour terminer $R = \mathcal{N}_a k_B \approx 8.32 J.K^{-1}$, appelée constante des gaz parfaits. On a la formule suivante, qui est celle à retenir :

$$PV = NRT$$

Cette formule est l'équation d'état des gaz parfaits. Elle montre que, pour un gaz donné, il suffit de connaître deux quantités parmi son volume, sa pression et sa température pour en déduire l'autre. Evidemment, cette relation

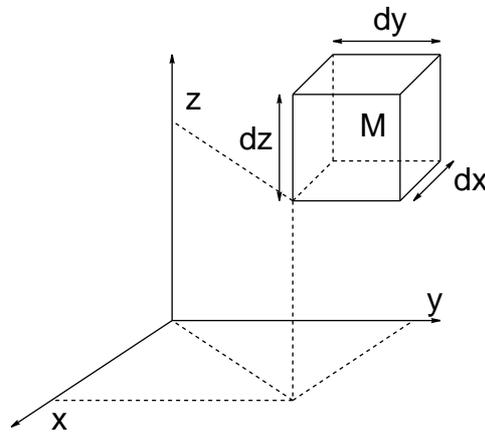
est extrêmement simplifiée puisqu'elle ne prend pas en compte les interactions à distance entre atomes et ne s'applique qu'au cas monoatomique. Il existe des modèles plus sophistiqués, le plus répandu étant celui de Van der Waals, qui corrige le modèle du gaz parfait en proposant une formulation pour les interactions à distance. Nous verrons en exercices comment est faite cette correction.

2.1.3 La statique des fluides

L'objet de cette partie est d'expliquer le comportement d'un fluide (gaz ou liquide) statique, c'est-à-dire au repos. Les idées qui y sont développées permettront en particulier d'établir le fameux théorème d'Archimède.

Equation fondamentale

Considérons un fluide au repos que nous supposons soumis à un champ de forces volumiques de densité \vec{f}_v . C'est-à-dire que si dv est un élément de fluide centré sur le point M , il est soumis à la force extérieure $d\vec{F} = \vec{f}_v(M) dv$. L'équation fondamentale de la statique des fluides nous fournit une relation entre la pression et le champ \vec{f}_v de forces volumiques. Dans un repère cartésien, soit l'élément de volume représenté sur la figure ci-dessous.



Ce cube élémentaire est soumis, du fait du champ de forces volumiques, à la force $d\vec{F} = \vec{f}_v(M) dv = \vec{f}_v(M) dx dy dz$. D'autre part, chacune de ses six faces est soumise à la pression exercée par le reste du fluide. Celui-ci étant au repos, les forces de pression sont normales à la surface à laquelle elles s'appliquent. Sur l'axe des x , par exemple, la résultante des forces de

pression s'écrit donc :

$$dF_x = (-P(x, y, z) + P(x + dx, y, z)) dz dy$$

Les signes s'expliquent par le fait que les forces de pression sont toujours répulsives. Ainsi, la pression de l'ensemble du fluide sur la face d'abscisse x est bien dirigée vers les x négatifs. Par ailleurs, le produit $dy dz$ est évidemment la surface de chacun des deux faces considérées ici. Pour les autres axes, la relation est tout à fait analogue et on obtient les trois égalités :

$$\begin{cases} dF_x = (-P(x, y, z) + P(x + dx, y, z)) dz dy \\ dF_y = (-P(x, y, z) + P(x, y + dy, z)) dx dz \\ dF_z = (-P(x, y, z) + P(x, y, z + dz)) dy dx \end{cases}$$

Comme $\frac{P(x+dx,y,z)-P(x,y,z)}{dx} = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z)$ ces trois équations deviennent :

$$\begin{cases} dF_x = -\frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) dx dy dz \\ dF_y = -\frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) dx dy dz \\ dF_z = -\frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) dx dy dz \end{cases}$$

Sous une forme condensée, en utilisant l'opérateur gradient, on a finalement :

$$d\vec{F} = -dx dy dz \overrightarrow{\text{grad}}P = -dv \overrightarrow{\text{grad}}P$$

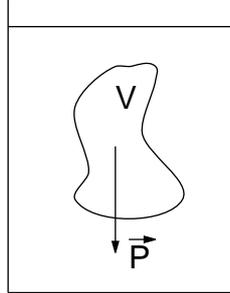
Dès lors, la formulation de l'équation fondamentale de la statique des fluides est immédiate. Il suffit d'invoquer le théorème fondamental de la dynamique. En effet, le fluide étant au repos, l'accélération de l'élément de volume considéré est nulle et donc la somme des forces auxquelles il est soumis est elle-même nulle. Or il est soumis d'une part aux forces de pression que nous venons d'évaluer, et d'autre part à la force volumique. En conclusion :

$$\begin{aligned} -dv \overrightarrow{\text{grad}}P + dv \vec{f}_v &= 0 \\ -\overrightarrow{\text{grad}}P + \vec{f}_v &= 0 \end{aligned}$$

L'exemple le plus classique, que nous étudierons de nombreuses fois en exercices, est celui où le champ de forces volumiques est la force gravitationnelle. Dans ce cas, cette équation s'écrit $-\overrightarrow{\text{grad}}P - \rho g \vec{e}_z = 0$, où ρ est la masse volumique du fluide.

Le théorème d'Archimède

Soit un fluide au repos dans lequel est immergé, partiellement ou totalement, un objet solide de volume immergé V .



Expérimentalement (en regardant un bateau ou une mongolfière par exemple), on remarque que l'objet n'est pas seulement soumis à son poids, mais aussi à une force de sens opposé, appelée force d'Archimède. Pour démontrer l'existence de cette force et en prévoir les caractéristiques, considérons la situation suivante où la partie immergée de l'objet est remplacée par le fluide environnant. Le fluide n'a pas de raison de ne plus être au repos, ce qui implique que chaque parcelle de fluide est *pseudo-isolée* et en particulier le volume V de fluide qui remplace l'objet. Or ce volume est soumis d'une part à son poids \vec{P} , qui s'applique en son centre de masse, d'autre part aux forces de pression exercées par le reste du fluide sur la surface. Du fait que le fluide est au repos, on a donc $\vec{F} + \vec{P} = \vec{O}$, ces deux forces s'appliquant de plus au même point (en l'occurrence le centre de masse du volume de fluide, puisque c'est à ce point que s'applique le poids). Or les forces \vec{F} de pression ne dépendent que de la surface définissant le volume et de l'état du fluide environnant cette surface. La force d'Archimède à laquelle est soumis le solide immergé est donc la même que ces forces de pression.

En conclusion, un solide immergé dans un fluide au repos est soumis à la force d'Archimède dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Direction verticale ;
- sens vers le haut ;
- point d'application appelé *centre de poussée* : c'est le centre de masse du volume de fluide déplacé par l'objet immergé ;
- module égal au poids de fluide déplacé.

2.2 Le premier principe de la thermodynamique

La premier principe de la thermodynamique est une formulation thermodynamique d'un principe général de la physique : la conservation de l'énergie. Sa formulation précise repose sur l'énoncé préalable de quelques définitions et

résultats. Cette partie du cours de thermodynamique s'articule donc en trois points : quelques définitions préliminaires, puis l'énoncé du premier principe et enfin des applications de ce principe.

2.2.1 Définitions

Notion de système

Nous allons être amenés à parler de l'énergie d'un système. On peut donner plusieurs définitions de ce qu'est un système au sens thermodynamique. Nous nous contenterons ici d'évoquer deux types de systèmes.

Un système peut être défini par l'ensemble des constituants (molécules ou atomes) le composant. Si l'on cherche par exemple à étudier le comportement d'un liquide lorsqu'il est chauffé dans une casserole, le système pourra être défini comme l'ensemble des molécules composant le liquide *initialement*. Ou bien, si ce liquide est chauffé de telle sorte qu'il finisse par entrer en ébullition (donc que des molécules s'échappent du liquide sous forme gazeuse), on pourra préférer définir le système comme étant, à chaque instant, l'ensemble des particules constituant le *liquide* proprement dit.

Par ailleurs, on peut définir un système thermodynamique comme l'ensemble de la matière se trouvant à l'intérieur d'un domaine géométrique, qui peut être fixe ou variable au cours du temps. Si l'on étudie le mouvement ascensionnel d'une mongolfière, ce domaine géométrique pourra être celui défini par le ballon.

Le premier exemple nous permet déjà de classer les systèmes en deux catégories : fermés et ouverts. Un système est fermé s'il n'échange pas de matière avec l'extérieur. Ainsi, le système composé de l'ensemble des molécules du liquide initialement est fermé, tandis que celui composé à chaque instant de l'ensemble des molécules constituant le liquide est ouvert : il perd de la matière au fur et à mesure qu'une partie des molécules s'échappent du liquide par ébullition.

Les systèmes fermés peuvent eux-mêmes être subdivisés en deux sous-catégories : systèmes isolés et non isolés. Un système est dit isolé lorsqu'il n'échange ni matière (il est donc fermé) ni énergie avec l'extérieur.

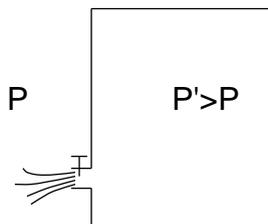
Notion de transformation

Si une grande part de la thermodynamique peut être vue comme l'étude *statique* d'un système, on souhaitera souvent prévoir et comprendre le comportement d'un système lorsqu'on le fait évoluer au cours du temps. Il est alors l'objet d'une *transformation*. La thermodynamique fait une distinction

fondamentale entre deux types de transformations : lente et brutale. Le sens de cette distinction est assez intuitif mais doit être précisé car il a une incidence fondamentale sur la façon dont une transformation pourra être étudiée.

On dit qu'un système subit une transformation lente si son évolution est une succession de passages par un état d'équilibre. Au contraire, une transformation est brutale si elle est le passage d'un état d'équilibre à un autre état d'équilibre *sans* passage intermédiaire par des états d'équilibre.

Considérons l'exemple schématisé ci-dessous. Le récipient est rempli d'air à la pression $P' > P$ et percé d'un orifice fermé par un robinet. A l'instant $t = 0$, on ouvre le robinet, ce qui provoque l'échappement du gaz vers l'extérieur (puisque sa pression est supérieure à la pression extérieure). Commençons par faire le choix du système. Ce pourrait être l'ensemble des molécules de gaz contenues dans le récipient avant ouverture du robinet (système fermé). Nous allons le choisir comme étant à chaque instant l'ensemble des molécules de gaz présentes dans le récipient (il est alors ouvert). Il est clair que ce système évolue : au bout d'un temps infiniment long, la pression à l'intérieur du récipient sera égale à celle de l'extérieur. Quelle est la nature de la transformation ?



La réponse à cette question est variable. On comprend que ce système est soumis à deux effets antagonistes. D'une part, il a tendance à aller vers un équilibre thermodynamique interne qui se traduit par l'uniformisation des ses variables d'état (pression, température) au sein du récipient. D'autre part, la fuite vers l'extérieur tend à le déséquilibrer, à introduire des hétérogénéités (par exemple, il est intuitif que la pression au voisinage de l'orifice tend à être inférieure à la pression moyenne dans l'enceinte). La nature de la transformation dépend de la prédominance d'un de ces deux effets sur l'autre. Soyons plus quantitatifs. L'uniformisation des variables d'état (c'est-à-dire l'évolution d'un système en déséquilibre vers son état d'équilibre) a un temps caractéristique τ_u , qui dépend en particulier de la mobilité des particules au sein de l'enceinte. De même l'hétérogénéisation du système du fait de la fuite a un temps caractéristique τ_h dépendant lui principalement du débit de la fuite. Si $\tau_u \ll \tau_h$, le système a largement le temps de passer à l'équilibre à

tout instant : il subit une transformation lente. Si au contraire $\tau_u \gg \tau_h$, il n'en a jamais le temps et subit une transformation brutale. On peut confirmer cette distinction en considérant les cas limites. Si $\frac{\tau_u}{\tau_g} \rightarrow 0$, on est dans le cas où le robinet est complètement fermé. Il n'y a pas d'évolution et le système est bien à l'équilibre en permanence. Si $\frac{\tau_u}{\tau_g} \rightarrow \infty$, le débit est infini : c'est une explosion ! La transformation est bien évidemment brutale.

2.2.2 Énoncé du premier principe

Énergie d'un système thermodynamique

L'énergie d'un système thermodynamique est l'énergie totale du système des particules le constituant. On peut la décomposer sous la forme suivante :

$$E = E_c + E_{pot\ int} + E_{pot\ ext}$$

Dans cette expression, E_c est l'énergie cinétique de l'ensemble des particules, donc la somme des énergies cinétiques de chaque particule. $E_{pot\ int}$ est l'énergie potentielle interne au système : elle traduit les interactions entre les particules du système. La somme de ces deux quantités s'appelle *énergie interne* du système (nous l'avons défini dans le cas du gaz parfait comme l'énergie cinétique des particules constituant le gaz. Ces deux définitions sont cohérentes car, pour le gaz parfait, on néglige les interactions entre particules ce qui revient à supposer $E_{pot\ int} = 0$). $E_{pot\ ext}$ est l'énergie potentielle externe du système, qui traduit les interactions entre l'extérieur et les particules du système.

Nous admettons que l'énergie d'un système thermodynamique est une grandeur extensive, ce qui n'est en fait qu'une approximation très souvent satisfaisante.

Le premier principe de la thermodynamique

Soit un système thermodynamique en évolution. La variation de son énergie entre deux états d'équilibre est la somme du travail des forces exercées par l'extérieur et de la chaleur fournie par l'extérieur :

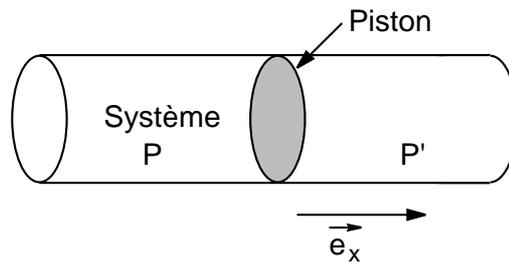
$$\Delta E = W + Q$$

De plus, l'énergie interne U est une variable d'état du système : sa valeur est entièrement déterminée par la connaissance de l'état macroscopique du système. Cela implique que la variation de l'énergie interne (et donc $W + Q$) entre deux états est indépendante de la transformation qui a mené de l'un à l'autre : elle ne dépend que de l'état initial et de l'état final.

Le travail des forces extérieures : exemple important des forces de pression

Afin d'exploiter le premier principe dans l'étude d'un système, il est indispensable de pouvoir évaluer les différents termes intervenant dans l'équation qui le traduit. En particulier, le terme W mérite une étude particulière dans le cas où les forces extérieures sont celles exercées par la pression.

Soit donc le système schématisé ci-dessous.



On suppose le piston en mouvement et le problème posé est : quel est le travail de la force exercée par le piston sur le système ? Pour répondre à cette question, il faut considérer deux cas : la transformation lente (si le piston se déplace lentement) et la transformation brutale (si au contraire il est en mouvement rapide).

Dans le premier cas, on peut considérer que le fluide constituant le système passe au cours de la transformation par une succession d'états d'équilibre. Ainsi, au cours d'un déplacement infinitésimal dl du piston, le système passe d'un état d'équilibre à un autre. Au premier ordre, la pression du système est donc définie et constante. La force exercée par le piston sur le système est, d'après le troisième principe de Newton, opposée à celle exercée par le système sur le piston. Or, celle-ci est, par définition de la pression, égale à : $\vec{F} = PS \vec{e}_x$, où S est la surface du piston. Alors, par définition du travail d'une force, le travail δW de la force exercée par le piston sur le fluide au cours de ce déplacement infinitésimal dl est : $\delta W = -F dl = -PS dl = -P dV$, où $dV = S dl$ est la variation de volume du système au cours de ce déplacement.

Dans le second cas d'une transformation brutale, l'évolution de l'état initial à l'état final ne se fait pas par passages successifs par des états d'équilibre. Cela implique en particulier que la pression n'a pas de raison d'être définie à chaque instant de cette transformation (car il peut y avoir des hétérogénéités du système). On ne peut donc pas appliquer le même raisonnement. On peut toutefois arriver à un résultat intéressant en supposant que la pression extérieure P' reste constante au cours de la transformation. Cela revient en fait

à supposer que le milieu extérieur est suffisamment étendu pour "absorber" la différence de pression provoquée par le mouvement du piston. Nous allons de plus supposer que le piston était initialement immobile et que, après la transformation, il est de nouveau immobile. Dans ce cas, la variation de son énergie cinétique est $\Delta E_c = 0 - 0 = 0$. Or la mécanique nous affirme que cette variation est aussi égale au travail des forces exercées sur le piston, qui sont celle exercée par l'extérieur et celle exercée par le système :

$$\begin{aligned} dE_c &= \delta W_{syst} + \delta W_{ext} \\ &= -P'S dl + F dx \end{aligned}$$

où F est la force exercée par le système sur le piston

Ainsi $\Delta E_c = W_{syst} + W_{ext} = 0$ donc $W_{syst} = -W_{ext}$. Or le travail de la force exercée par l'extérieur sur le système est :

$$\begin{aligned} W_{ext} &= - \int_x^{x+\Delta x} P'S dx \\ &= -P'(V_2 - V_1) \end{aligned}$$

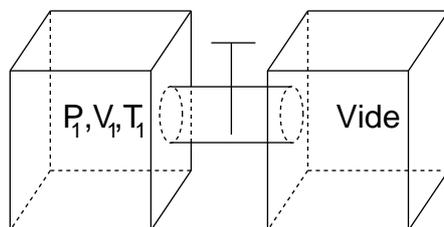
Finalement, le travail de la force exercée par le système sur le piston est égal à $W_{syst} = -W_{ext} = P'(V_2 - V_1)$ et le travail de la force exercée par le piston sur le système est l'opposé :

$$W = P'(V_1 - V_2)$$

2.2.3 Application du premier principe : la détente de Joule-Gay Lussac

Le protocole expérimental

La protocole expérimental de la détente de Joule-Gay Lussac est schématisé ci-dessous :



L'enceinte de gauche est initialement remplie d'un gaz à l'équilibre, de pression, température et volumes respectifs P_1 , V_1 , T_1 . L'enceinte de droite

est vide. L'expérience consiste à ouvrir la vanne et donc à permettre la détente du gaz contenu dans l'enceinte de gauche vers l'enceinte de droite. On suppose de plus que l'ensemble des deux enceintes et du conduit les reliant est parfaitement *calorifugé*, ce qui signifie que les parois empêchent tout transfert de chaleur entre l'intérieur et l'extérieur.

Résultats

Nous allons choisir comme système l'ensemble des molécules de gaz initialement présentes dans l'enceinte (c'est-à-dire dans celle de gauche puisque l'autre est initialement vide). La transformation étudiée est la détente du gaz, de l'instant où on ouvre la vanne jusqu'à ce que l'équilibre soit établi.

Au cours de cette transformation, l'ensemble des transferts de chaleur est nul, puisque les parois sont supposées parfaitement calorifugées : $Q = 0$. D'autre part, les parois de l'enceinte sont immobiles tout au long de la transformation, ce qui implique qu'elles exercent un travail nul sur le gaz. Comme les parois sont les seules parties extérieures à notre système en contact avec lui, le travail des forces extérieures au système est nul : $W = 0$.

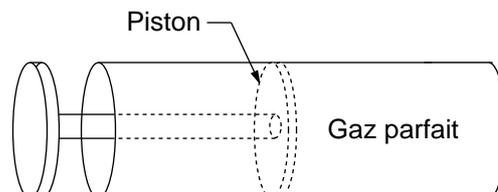
Finalement, $\Delta U = Q + W = 0$. Supposons maintenant que le gaz subissant la détente soit parfait. Nous avons admis dans la partie sur les gaz parfaits que son énergie interne U dépend alors uniquement de la température : elle lui est proportionnelle. Puisque U ne varie pas au cours de la transformation, c'est que T est elle-même constante. Ainsi, la détente de Joule-Gay Lussac d'un gaz parfait est *isotherme* : elle conserve la température du gaz.

2.3 Exercices

2.3.1 Compréhension du cours

Exercice 1. Quelques calculs sur les gaz parfaits

Dans tout l'exercice, on s'intéresse à un gaz parfait monoatomique enfermé dans une enceinte de volume variable.



1. Initialement, le volume de l'enceinte est V_1 . Quelle est la pression du gaz sachant que sa température est T_1 et qu'il contient une mole ?
2. On diminue le volume de moitié en maintenant la température à sa valeur initiale. Que devient la pression ?
3. On procède de même qu'en 2. mais en prenant soin de réaliser une transformation lente. Quel est le travail des forces de pression au cours de cette transformation ?

On donne pour les applications numériques :

- $R = 8.32 \text{ J.K}^{-1}$
- $V_1 = 1 \text{ L}$
- $T_1 = 293 \text{ K}$

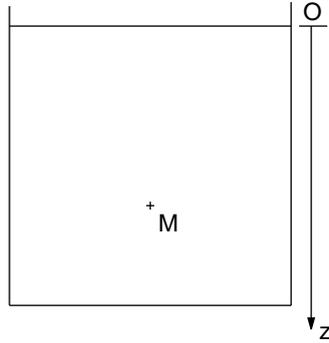
Correction.

1. La relation à utiliser est bien entendu l'équation d'état des gaz parfaits $PV = NRT$. Ici, N , le nombre de moles de gaz, vaut 1. Tout le reste est donné sauf la pression P qu'on nous demande de calculer.
On a donc $P = \frac{RT_1}{V_1}$. L'application numérique fournit $P = 24.4 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 24.4 \text{ bar}$. (Attention à bien utiliser les unités S.I. : les températures doivent s'exprimer en Kelvin, les pressions en Pascal et les volumes en m^3)
2. Inutile de remettre sa calculatrice à contribution. Le volume a diminué de moitié, toutes les autres données restant inchangées. La même relation qu'au 1. nous permet d'affirmer que la pression a doublé : $P = 48.7 \text{ bar}$
3. Le travail des forces de pression au cours d'une transformation lente est donné par la relation $W = -\int P dV$. Ici, le gaz est parfait et monoatomique donc il vérifie $PV = NRT = RT$ et le travail s'écrit $W = -\int RT \frac{dV}{V} = -RT_1 \int \frac{dV}{V} = -RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = RT_1 \ln 2$

Exercice 2. Pression de l'eau en profondeur

L'objectif de cet exercice est l'évaluation de la pression subie sous l'eau en fonction de la profondeur, et une comparaison avec la pression atmosphérique en fonction de l'altitude.

1. Ecrire la relation entre la profondeur z du point M et la pression exercée par l'eau en ce point.
2. En déduire la profondeur d'eau à laquelle la pression est égale à deux fois la pression atmosphérique au niveau de la mer.



On donne pour les applications numériques :

- La masse volumique de l'eau : $\rho_e = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$
- L'accélération de la pesanteur : $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$
- La pression atmosphérique au niveau de la mer : $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$

Correction

1. Le cours nous fournit l'équation fondamentale de la statique des fluides : $\overrightarrow{\text{grad}} P = \overrightarrow{f_v}$. Ici, les seules forces volumiques mises en jeu sont gravitationnelles et on a donc $\overrightarrow{f_v} = \rho g \overrightarrow{e_z}$.

Par ailleurs, par définition du gradient,

$$\overrightarrow{\text{grad}} P = \frac{dP}{dx} \overrightarrow{e_x} + \frac{dP}{dy} \overrightarrow{e_y} + \frac{dP}{dz} \overrightarrow{e_z}$$

On en déduit que la pression ne dépend que de la profondeur, et selon l'équation $\frac{dP}{dz} = \rho g$

2. Cette équation différentielle se résout facilement, en supposant qu'à la profondeur 0, la pression est la pression atmosphérique : $P = P_0 + \rho g z$. La profondeur recherchée est donc $z = \frac{P_0}{\rho g} \approx 10.2 \text{ m}$

Exercice 3. La force d'Archimède

On s'intéresse à un ballon sphérique (rayon a) et rigide rempli d'hélium à la pression P et à la température T . On considérera l'hélium comme un gaz parfait.

1. Le ballon est immergé dans l'eau à une profondeur h . Quelle est la valeur de la poussée d'Archimède à laquelle il est soumis et quelle est la résultante des forces qu'il subit ?

2. Même question, le ballon étant cette fois dans l'air à la pression P_{atm} .

On utilisera les données suivantes pour les applications numériques :

- $a = 0.5 \text{ m}$
- $P = P_{atm} = 10^5 \text{ Pa}$
- $T = 30^\circ\text{C}$
- $R = 8.32 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$
- Masse volumique de l'eau : $\rho_{eau} = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$
- Masse volumique de l'air au niveau de la mer : $\rho_{air} = 1 \text{ kg.m}^{-3}$
- Masse molaire de l'hélium : $M = 4 \text{ g.mol}^{-1}$

Correction

1. La force d'Archimède est dirigée vers le haut et égale au poids du fluide déplacé par l'objet immergé :

$$\begin{aligned} F_a &= \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_{eau} g \\ &\approx 5100 \text{ N} \end{aligned}$$

Le ballon est de plus soumis à son poids. Nous connaissons son volume : il nous faut sa masse volumique. Or l'énoncé considère l'hélium comme un gaz parfait. Il vérifie donc la relation $PV = nRT$, ou encore $PV_m = RT$ où V_m est le volume molaire. Le nombre de moles par unités de volumes est donc :

$$n_v = \frac{1}{V_m} = \frac{P}{RT}$$

La masse par unité de volume s'obtient alors en multipliant par la masse molaire :

$$\rho_{He} = \frac{PM}{RT}$$

Finalement, le poids de l'hélium contenu dans le ballon est

$$P_{He} = \frac{4}{3} \pi a^3 \frac{PM}{RT} \approx 8.3 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

Le poids est donc très petit devant la force d'archimède.

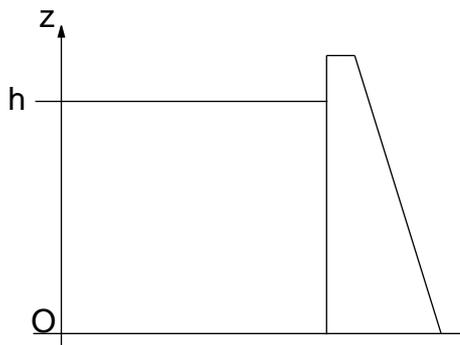
2. Le poids est inchangé et la force d'Archimède ne change que par le biais de la masse volumique de l'air qui est 1000 fois inférieure à celle de l'eau : $F_a \approx 5.1 \text{ N}$

2.3.2 Approfondissement

Exercice 4. Poussée sur un barrage

L'exercice 2 nous a donné une relation entre la profondeur et la pression exercée par l'eau. Nous allons appliquer ce résultat à l'étude des forces subies par un barrage.

On considère donc un barrage, dont la surface de contact avec l'eau est supposée plane. La hauteur d'eau est h .



1. Quelle est la résultante des forces exercées par l'eau sur le barrage ?
2. Quel est le moment résultant de ces forces par rapport à la base du barrage ?
3. En déduire la position du *centre de poussée*, c'est-à-dire du point du barrage où serait exercée la résultante des forces pour avoir le moment résultant.

Correction

1. Les forces exercées par l'eau sont liées à la pression, donc à la profondeur. Nous avons vu dans l'exercice précédent que $\frac{dP}{dz} = \rho g$. Il faut cependant prendre garde aux repères choisis dans les deux exercices : l'origine et l'orientation de l'axe des z ont changé. Tenant compte de ces modifications, on a dans notre cas :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

et donc $P(z) = P_{atm} + (h - z)\rho g$, où P_{atm} est la pression atmosphérique. La surface de contact entre l'eau et le barrage est un rectangle de largeur h et de longueur la longueur l du barrage. Nous allons la décomposer en

une juxtaposition de rectangles de même longueur mais de largeur dz . Sur chacun de ces rectangles, la pression peut être considérée comme constante puisqu'elle ne dépend que de la hauteur et que dz est un infiniment petit.

La force exercée par l'eau sur un de ces rectangles, à la hauteur z , est :

$$\begin{aligned} dF &= P(z)l dz \\ &= (P_{atm} + (h - z)\rho g)l dz \end{aligned}$$

Et la force résultante est la somme de ces forces élémentaires :

$$\begin{aligned} F &= \int_0^h (P_{atm} + (h - z)\rho g)l dz \\ &= l \left[P_{atm}z + (hz - \frac{z^2}{2})\rho g \right]_0^h \\ &= l \left(P_{atm}h + \frac{h^2}{2}\rho g \right) \end{aligned}$$

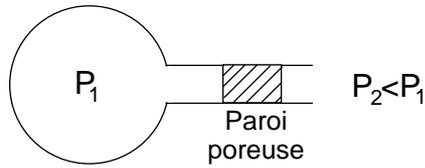
2. Le moment d'une force par rapport à un axe a été défini dans le chapitre mécanique. Si A est un point quelconque de cet axe, le moment d'une force \vec{F} est la projection sur l'axe de $\vec{AM} \wedge \vec{F}$. Dans notre cas, la force exercée par l'eau est normale au plan de contact entre l'eau et le barrage, donc à l'axe définissant la base du barrage.

Le moment de la force exercée sur un rectangle de largeur dz , placé à la hauteur z est donc $dM = zdF = z(P_{atm} + (h - z)\rho g)l dz$. La résultante du moment est donc :

$$\begin{aligned} M &= \int_0^h z(P_{atm} + (h - z)\rho g)l dz \\ &= l \left[P_{atm}\frac{z^2}{2} + \left(h\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right) \rho g \right]_0^h \\ &= l \left[P_{atm}\frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6}\rho g \right] \end{aligned}$$

3. Le centre de poussée se trouve alors à une hauteur h_0 telle que $h_0F = M$. Donc

$$h_0 = \frac{P_{atm}h + \frac{h^2}{3}\rho g}{P_{atm} + h\rho g}$$

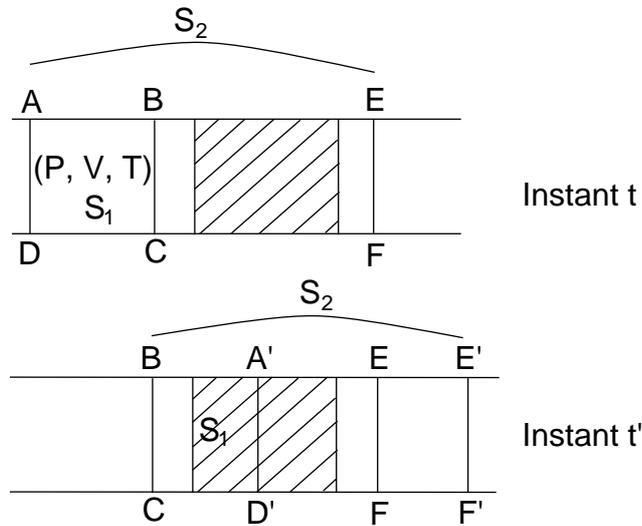


Exercice 5. La détente de Joule-Thomson-Kelvin

La détente de Joule-Thomson-Kelvin est associée au protocole expérimental schématisé ci-dessous.

Le gaz confiné dans l'enceinte est à la pression P_1 et s'échappe vers l'extérieur, qui est à la pression P_2 . On suppose que les parois de l'enceinte et du tuyau sont calorifugées. On a de plus placé une paroi poreuse ralentissant la détente : nous admettrons que le système peut être considéré comme en régime stationnaire. C'est-à-dire que les pressions P_1 et P_2 évoluent suffisamment lentement pour être considérées comme constantes pendant la durée étudiée.

On se place à un instant t et on considère les deux systèmes \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 .



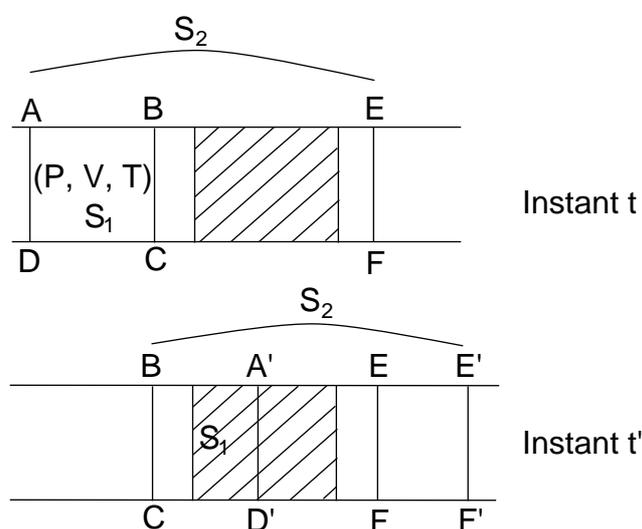
\mathcal{S}_1 est le système constitué du gaz compris entre A, B, C et D à l'instant t . \mathcal{S}_2 est constitué du gaz compris entre A, E, F et D à l'instant t . Ce sont deux systèmes fermés.

1. Représenter les deux systèmes à l'instant t' où toutes les molécules de chacun d'eux ont franchi la limite $[B, C]$.

2. Ecrire le premier principe entre les instants t et t' pour le système \mathcal{S}_2 .
On fera intervenir l'énergie interne du système ouvert \mathcal{S}_0 délimité par B,E,F et C.
3. Quel est entre t et t' le travail reçu par \mathcal{S}_2 ?
4. En déduire pour le système \mathcal{S}_1 une relation entre U , P et V .

Correction

1. Les deux systèmes sont fermés par définition puisqu'on les décrit comme un ensemble invariable de molécules. A l'instant t' , ils sont délimités à gauche par le segment $[B,C]$, ce qui fournit le schéma suivant.



2. A l'instant t , l'énergie interne de \mathcal{S}_2 est la somme de l'énergie interne de \mathcal{S}_1 et de \mathcal{S}_0 : $U_2 = U_1 + U_0$.

Il en est de même à l'instant t' : $U_2' = U_1' + U_0'$. Le premier principe s'écrit donc $(U_1' + U_0') - (U_1 + U_0) = W + Q$. On peut d'ores et déjà remarquer que $Q = 0$ puisque les parois sont parfaitement calorifugées. On a donc :

$$(U_1' + U_0') - (U_1 + U_0) = W$$

Mais l'énoncé fait l'hypothèse que le régime d'évolution est stationnaire, donc que les grandeurs d'état du système ne dépendent pas du temps. En particulier, l'énergie interne de \mathcal{S}_0 est constante, puisque ce système a des limites fixées.

Ainsi, $U_1' - U_1 = W$.

3. Dans cette égalité, W est le travail reçu par \mathcal{S}_2 au cours de la transformation de t à t' . Or ce travail est exercé uniquement par le gaz environnant, par l'intermédiaire des forces de pression. A gauche, la pression est P_1 et la variation de volume est le volume de la section A,B,C,D : c'est V_1 . A droite, la pression est P_2 et la variation de volume est le volume de la section E,E',F',F : c'est V_2 .

Le travail reçu est donc : $W = P_1V_1 - P_2V_2$

4. On en déduit que $U'_1 + P_2V_2 = U_1 + P_1V_1$. La grandeur $U + PV$ s'appelle l'enthalpie : la détente de Joule-Thomson-Kelvin est donc isenthalpique.

Exercice 6. Application du premier principe : la transformation isochore

Une transformation isochore est la transformation d'un système dont le volume est conservé. Nous allons dans cet exercice étudier ce type de transformations pour en déduire des résultats intéressants sur les gaz parfaits.

1. Ecrire le premier principe pour une telle transformation.
2. Proposer la définition d'une grandeur adéquate liant variation de température et variation d'énergie interne au cours d'une telle transformation. On appellera cette grandeur *capacité calorifique à volume constant* et on la notera C_v .
3. Montrer que la capacité calorifique à volume constant d'un gaz parfait ne dépend que de sa température T .

Correction

1. Le premier principe s'écrit, dans le cas général, $\Delta U = W + Q$. Ici, le volume de gaz est supposé constant, ce qui implique que le travail des forces extérieures est nul. On a donc :

$$\Delta U = Q$$

2. Nous avons vu que l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de sa température. On peut donc définir la grandeur suivante :

$$C_v = \frac{dU}{dT} \quad (J.K^{-1})$$

3. On a alors $dU = C_v dT$. Comme l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de sa température, il en est de même pour C_v . Notons que ce n'est qu'une exception propre au gaz parfait.

Exercice 7. Notion d'entropie. Second principe de la thermodynamique

Comme son nom l'indique, le second principe vient compléter le premier principe. Si celui-ci stipule la conservation de l'énergie totale de l'univers, sans s'intéresser aux modes d'évolution, celui-là introduit un nouveau concept : l'irréversibilité.

L'irréversibilité, au même titre par exemple que la gravitation, fait partie de ces notions de physique mal comprises au niveau fondamental, mais qui sont familières à tous. Lorsqu'on met des glaçons dans un verre d'eau, on s'attend bien à voir les glaçons prendre de la chaleur au liquide et, ainsi le refroidir. Mais le premier principe n'interdit pas le contraire : la chaleur pourrait aller des glaçons vers l'eau ; le liquide s'échaufferait et les glaçons refroidiraient encore. C'est le second principe qui intervient pour stipuler que ce genre de phénomènes est impossible.

Toute transformation est fonction du temps t . Une transformation réversible est une transformation qui reste possible physiquement si on change t en $-t$, c'est-à-dire si on inverse le sens d'écoulement du temps. A contrario, une transformation irréversible est impossible lorsqu'on change t en $-t$. Le second principe stipule qu'il existe des transformations irréversibles (presque toute transformation est en fait irréversible...). Il introduit de plus une nouvelle grandeur d'état : l'entropie S . L'entropie est définie comme suit :

- L'entropie d'un système évoluant de manière irréversible augmente, jusqu'à l'établissement d'un état d'équilibre où elle est maximum.
- L'entropie d'un système évoluant de manière réversible est constante.
- L'entropie est une grandeur extensive.

Nous allons déduire quelques résultats de ces nouvelles définitions.

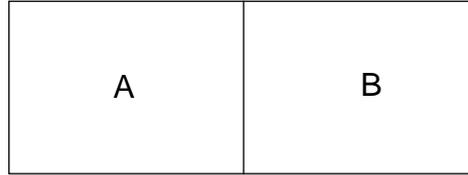
1. On définit la température thermodynamique d'un système par :

$$\frac{1}{T_{thermo}} = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_V$$

La notation $\left(\frac{\partial}{\partial U} \right)_V$ représente la dérivée par rapport à la variable U , le volume étant fixé.

On considère le système schématisé ci-dessous, les parois extérieures étant calorifugées. La paroi interne, au contraire, autorise les transferts de chaleur, ce qui permet à un équilibre de s'installer. Montrer que, à l'équilibre, $T_A = T_B$. En déduire que la transition vers cet équilibre se fait par un transfert de chaleur du système le plus chaud vers le plus froid.

2. Quelle est l'unité de l'entropie ?



3. Dans cette question, la paroi interne est parfaitement mobile. Montrer que, à l'équilibre,

$$\left(\left(\frac{\partial S_A}{\partial U_A} \right)_{V_A} - \left(\frac{\partial S_B}{\partial U_B} \right)_{V_B} \right) dU_A + \left(\left(\frac{\partial S_A}{\partial V_A} \right)_{U_A} - \left(\frac{\partial S_B}{\partial V_B} \right)_{U_B} \right) dV_A = 0$$

En déduire une définition possible de la pression thermodynamique

4. Montrer qu'au cours de la transformation d'un système vérifiant une équation d'état de la forme $f(P, V, T) = 0$, on a :

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T}dV$$

Correction

1. Notons T_A^0 et T_B^0 les températures respectives des deux systèmes à l'état initial. Les volumes restant constants, on a au cours de la transformation :

$$\begin{cases} dS_A = \left(\frac{\partial S_A}{\partial U_A} \right)_{V_A} dU_A \\ dS_B = \left(\frac{\partial S_B}{\partial U_B} \right)_{V_B} dU_B \end{cases}$$

Or l'entropie est une grandeur extensive donc la variation totale de l'entropie s'écrit :

$$dS = \left(\frac{\partial S_A}{\partial U_A} \right)_{V_A} dU_A + \left(\frac{\partial S_B}{\partial U_B} \right)_{V_B} dU_B$$

Par définition de la température thermodynamique, on peut remplacer les dérivées partielles :

$$\begin{aligned} dS &= \frac{1}{T_A} dU_A + \frac{1}{T_B} dU_B \\ &= \frac{1}{T_A} dU_A - \frac{1}{T_B} dU_A \\ &= \left(\frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B} \right) dU_A \end{aligned}$$

En effet, les parois extérieures sont calorifugées ce qui implique, d'après le premier principe : $dU = dU_A + dU_B = 0$

L'équilibre étant atteint lorsque l'entropie est à son maximum, il se caractérise par $dS = 0$ et donc par $T_A = T_B$.

2. Il suffit de s'attarder sur la définition de la température thermodynamique, qui doit être en kelvin. Comme de plus l'énergie interne U est exprimée en joules, on a :

$$\begin{aligned} \frac{[S]}{[J]} &= \frac{1}{[K]} \\ [S] &= J.K^{-1} \end{aligned}$$

L'entropie s'exprime donc en joules par kelvin $J.K^{-1}$.

3. Cette fois, les volumes varient. L'expression de la variation d'entropie se complique donc un peu :

$$\begin{cases} dS_A = \left(\frac{\partial S_A}{\partial U_A}\right)_{V_A} dU_A + \left(\frac{\partial S_A}{\partial V_A}\right)_{U_A} dV_A \\ dS_B = \left(\frac{\partial S_B}{\partial U_B}\right)_{V_B} dU_B + \left(\frac{\partial S_B}{\partial V_B}\right)_{U_B} dV_B \end{cases}$$

Le premier principe nous permet encore d'affirmer que $dU_A + dU_B = 0$. D'autre part, le volume total de l'enceinte est constant, ce qui s'écrit $dV_A + dV_B = 0$. Invoquons de nouveau l'extensivité de l'entropie pour écrire :

$$\begin{aligned} dS &= \left(\frac{\partial S_A}{\partial U_A}\right)_{V_A} dU_A + \left(\frac{\partial S_A}{\partial V_A}\right)_{U_A} dV_A + \left(\frac{\partial S_B}{\partial U_B}\right)_{V_B} dU_B + \left(\frac{\partial S_B}{\partial V_B}\right)_{U_B} dV_B \\ &= \left(\left(\frac{\partial S_A}{\partial U_A}\right)_{V_A} - \left(\frac{\partial S_B}{\partial U_B}\right)_{V_B}\right) dU_A + \left(\left(\frac{\partial S_A}{\partial V_A}\right)_{U_A} - \left(\frac{\partial S_B}{\partial V_B}\right)_{U_B}\right) dV_B \end{aligned}$$

A l'équilibre, $dS = 0$ donc les deux termes apparaissant devant les différentielles sont nuls :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial S_A}{\partial U_A}\right)_{V_A} = \left(\frac{\partial S_B}{\partial U_B}\right)_{V_B} \\ \left(\frac{\partial S_A}{\partial V_A}\right)_{U_A} = \left(\frac{\partial S_B}{\partial V_B}\right)_{U_B} \end{cases}$$

La première égalité montre que, à l'équilibre, les températures thermodynamiques des deux systèmes sont égales. C'est de l'interprétation de la seconde égalité que vient la définition de la pression thermodynamique.

En effet, il est logique que les conditions de l'équilibre, exprimées par les deux égalités ci-dessus, stipulent non seulement l'équilibre thermique, mais aussi l'équilibre mécanique, donc l'égalité des pressions dans les deux systèmes. Quelle est l'unité de $\frac{\partial S}{\partial V}$? S s'exprime en $J.K^{-1}$ et V en m^3 . $\frac{\partial S}{\partial V}$ s'exprime donc en $J.K^{-1}.m^{-3}$. Or les joules sont aussi des $N.m$ donc $\left[\frac{\partial S}{\partial V}\right] = N.K^{-1}.m^{-2}$. Les pressions s'exprimant en $N.m^{-2}$ on voit que $T\frac{\partial S}{\partial V}$ a la dimension d'une pression. Et c'est effectivement comme cela qu'est définie la pression thermodynamique d'un système :

$$P_{thermo} = T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_U$$

4. Le système est défini par une équation d'état $f(P, V, T) = 0$. Cela signifie que, en théorie, la connaissance de deux de ces trois grandeurs permet la détermination de l'autre et la connaissance parfaite de l'état du système, donc en particulier de son entropie. En d'autres termes, l'entropie ne dépend en réalité que de deux grandeurs d'état. Etant donné l'objectif recherché, le plus simple est de prendre l'énergie interne U et le volume V . On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} dS &= \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_V dU + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_U dV \\ &= \frac{1}{T} dU + \frac{P}{T} dV \end{aligned}$$

Cette relation, appelée identité thermodynamique a une grande importance. Elle lie en effet entropie et énergie interne par une équation d'utilisation simple.

Chapitre 3

Electrocinétique

3.1 Notions générales d'électricité

Un circuit électrique est parcouru par un courant électrique, c'est-à-dire qu'il est le siège d'un mouvement ordonné de charges électriques. Le plus souvent, ces charges sont des électrons, mais elles peuvent être aussi des ions (comme dans un circuit d'électrolyse par exemple) ou des "trous", dans les semi-conducteurs. Dans tous les cas, ce courant est créé par la même cause : une différence de potentiel, ou tension. En effet, une différence de potentiel se traduit par l'existence d'un champ électrique \vec{E} exerçant une force sur toute particule chargée ($\vec{F} = q\vec{E}$).

Dans cette partie, nous allons commencer par préciser la notion de courant électrique, puis nous verrons comment peuvent varier les caractéristiques électriques d'un circuit. Enfin, nous expliquerons et énoncerons la loi d'Ohm, déjà vue au lycée.

3.1.1 Courant électrique et intensité

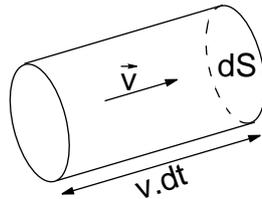
Considérons un volume donné dans lequel se produisent des mouvements de charge sous l'action d'un champ électrique. Nous voudrions donner des définitions permettant de caractériser quantitativement ces mouvements.

Le vecteur densité de courant

A l'intérieur de ce volume, soit une surface plane infinitésimale dS . Si l'on se restreint à un mouvement ordonné de charges, il est naturel de supposer que, au voisinage de cette surface, toutes les charges ont une même vitesse \vec{v} . Nous ferons de plus l'hypothèse qu'elles ont toutes même charge q , par exemple la charge élémentaire de l'électron. Soit par ailleurs n la densité

volumique de charges dans ce volume : n est le nombre de charges par unité de volume.

Calculons, en nous aidant du dessin ci-dessous, la charge électrique qui traverse dS pendant un temps dt infinitésimal.



Les particules qui, dans le temps dt , traversent dS sont celles qui étaient initialement dans le cylindre de génératrice vdt et de section dS . Ce cylindre est de volume $dt \vec{v} \cdot \vec{dS}$, où \vec{dS} est le vecteur normal à dS , orienté dans le même sens que \vec{v} et de norme dS . Il y a donc $ndt \vec{v} \cdot \vec{dS}$ charges dans ce volume, soit une charge traversant dS en un temps dt égale à $dq = qndt \vec{v} \cdot \vec{dS}$.

Finalement, la charge traversant dS par unité de temps est $\frac{dq}{dt} = nq \vec{v} \cdot \vec{dS}$. On définit alors le *vecteur densité de courant* par

$$\vec{J} = nq \vec{v}$$

Ainsi, la charge traversant une surface dS par unité de temps est $\frac{dq}{dt} = \vec{J} \cdot \vec{dS}$

L'intensité

Les considérations précédentes n'avaient de sens que dans la mesure où l'on s'intéressait à une surface infinitésimale dS . Dans le cas d'une surface macroscopique S , ces calculs n'ont plus de sens. En effet il n'y a alors plus aucune raison que la densité ou la vitesse des charges soit les mêmes dans tout le voisinage de S . D'autre part, le vecteur \vec{dS} n'existe pas si la surface n'est plus plane. Pour surmonter cet obstacle, il suffit de découper S en une infinité de surfaces dS infinitésimales et de remarquer que la charge traversant S est la somme des charges traversant ces surfaces, ce qui se note :

$$I = \int \int_S \vec{J} \cdot \vec{dS} = \int \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS$$

Cette notation a une signification très précise en mathématiques, ce qui ne doit pas nous effrayer. Il suffit de la voir comme une somme infinie de termes infinitésimaux.

Il est appelé *intensité* et représente la charge traversant S par unité de temps.

3.1.2 Les différents régimes

Il est évident intuitivement que le courant qui alimente l'ampoule d'une lampe torche et celle d'une lampe de bureau ne sont pas "de même nature" : l'un est produit par une pile, l'autre vient du réseau EDF. L'un est continu, l'autre alternatif; en d'autres termes, le régime de fonctionnement de ces deux circuits n'est pas le même. Appuyons nous sur des exemples pour comprendre quels sont les différents régimes de fonctionnement possible d'un circuit.

Le régime transitoire

Lors de la charge d'un condensateur, vue en classe de terminale, le condensateur passe d'un état d'équilibre (où il est déchargé et la tension à ses bornes est nulle) à un autre état d'équilibre (où il est chargé et la tension à ses bornes est $U = q/C$). Entre ces deux états d'équilibre, on observe une régime transitoire : la charge proprement dite. Un régime transitoire est ce qui s'observe avant un équilibre. Nous en verrons de nombreux exemples lors de l'étude des circuits R,L,C.

Le régime stationnaire

Le régime est stationnaire si aucune grandeur électrique ne dépend du temps. C'est le cas d'un circuit alimenté par un courant continu, donc de l'ampoule d'une lampe torche.

Le régime permanent

C'est un régime qui se maintient au cours du temps, sans forcément être stationnaire. Dire qu'il se maintient au cours du temps signifie que l'on peut observer une certaine périodicité. Par exemple, un circuit alimenté par un courant alternatif sinusoïdal est en régime permanent.

3.1.3 La loi d'Ohm

Un modèle simplifié de la conduction

Pour comprendre la fameuse loi $U = Ri$, il est nécessaire de faire un peu de physique au niveau microscopique. Cette section peut être sautée en première lecture.

Soit un volume de métal soumis à un champ \vec{E} invariant dans l'espace. On sait que le courant électrique dans les métaux est dû au mouvement ordonné des électrons de conduction. Soit donc un électron de ce volume. Il est soumis aux forces suivantes :

- La force électrique $\vec{F} = -e\vec{E}$
- Une force de ralentissement \vec{f} . En effet, sous l'action de \vec{F} , l'électron acquiert une vitesse dans la direction de \vec{E} et dans le sens contraire. Au cours de son mouvement dans le métal, il subit des chocs avec le reste de la matière; ces chocs le ralentissent (heureusement, sinon il finirait par avoir une vitesse infinie...). Nous faisons l'hypothèse qu'il est d'autant plus ralenti qu'il va vite : $\vec{f} = \frac{-m}{\tau}\vec{v}$. τ est une constante positive appelée *temps de relaxation*.

Ecrivons la relation fondamentale de la dynamique :

$$\begin{aligned} m\frac{d\vec{v}}{dt} &= q\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v} \\ \frac{q}{m}\vec{E} &= \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau}\vec{v} \end{aligned}$$

Cette équation différentielle admet la solution, en prenant $v=0$ à $t=0$:

$$\vec{v} = \frac{q}{m}\tau\vec{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

En faisant tendre t vers $+\infty$, on remarque que le régime transitoire est suivi d'un régime stationnaire dans lequel $\vec{v} = \frac{q}{m}\tau\vec{E}$

Donc, au bout d'un temps suffisamment long, la vitesse des électrons de conduction peut être considérée comme constante. Déduisons-en maintenant la loi d'Ohm.

La loi d'Ohm locale

Pour arriver à la relation classique que constitue la loi d'Ohm, nous avons commencé par une étude au niveau microscopique. Avant de pouvoir appliquer le résultat obtenu à des cas concrets, il nous faut maintenant passer à l'échelle macroscopique, en déterminant d'abord une relation locale.

Nous avons vu que, localement, $\vec{J} = nq\vec{v}$. Si on se place en régime stationnaire, dans un conducteur métallique, $\vec{v} = \frac{q}{m}\tau\vec{E}$. Donc $\vec{J} = \frac{nq^2\tau}{m}\vec{E}$. Si l'on note $\sigma = \frac{nq^2\tau}{m}$ (en $\Omega.m^{-1}$), et $\rho = 1/\sigma$, on a :

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \sigma\vec{E} \\ &= \frac{1}{\rho}\vec{E} \end{aligned}$$

Ce résultat constitue *la loi d'Ohm locale*.

La loi d'Ohm

Soit un conducteur cylindrique de section S et de longueur l soumis à une tension U . Calculons le courant I parcourant une section de ce conducteur, en utilisant la loi énoncée ci-dessus.

$$\begin{aligned} I &= \int \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \\ &= \int \int_S \sigma \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \int \int_S \sigma E dS \\ &= \sigma E S \\ &= \sigma \frac{U}{l} S \end{aligned}$$

En conclusion, on obtient la loi d'Ohm :

$$U = \underbrace{\frac{l}{\sigma S}}_R I$$

R est appelée *résistance* du conducteur, et l'on a bien une relation linéaire entre U et I . Il est à souligner que cette loi est vraie quel que soit le régime de fonctionnement du conducteur.

3.2 Les circuits électriques

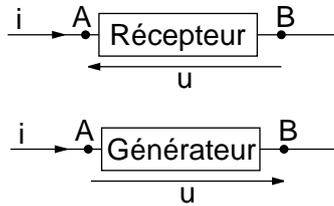
3.2.1 Les dipôles électriques

Définition

Elle est tout à fait intuitive : un dipôle électrique est un objet comportant deux bornes par lesquelles il peut être connecté à un circuit. Les exemples les plus connus de dipôles électriques sont : une résistance, un condensateur, une inductance, un générateur de tension,...

Notations et conventions

Lorsqu'on écrit des lois, telle que la loi d'Ohm liant la tension aux bornes d'une résistance à l'intensité du courant qui la traverse, il est essentiel de savoir quelles sont précisément les quantités dont on parle. Pour cela, il suffit de connaître les conventions résumées par les deux figures ci-dessous :



La convention distingue donc les récepteurs, qui sont les composants passifs, des générateurs, qui sont actifs. Cette distinction, effectivement arbitraire, peut paraître floue. Nous verrons dans le paragraphe suivant que, pour les composants usuels (et en tout cas pour ceux au programme des classes préparatoires), elle est assez intuitive.

Ainsi, quand on parle de tension u aux bornes d'un dipôle traversé par un courant i allant de A à B, on entend :

- $u = u_{AB} = V_A - V_B$ pour un récepteur,
- $u = u_{BA} = V_B - V_A$ pour un générateur.

Ces remarques prennent tout leur sens lorsqu'on s'intéresse à la caractéristique d'un dipôle, qui est la relation liant i traversant ce dipôle et la tension u à ces bornes : $u = f(i)$ ou $i = f(u)$. En effet, il est alors pratique de savoir, sans avoir à le préciser, ce que l'on entend par "i" et "u".

3.2.2 Exemples

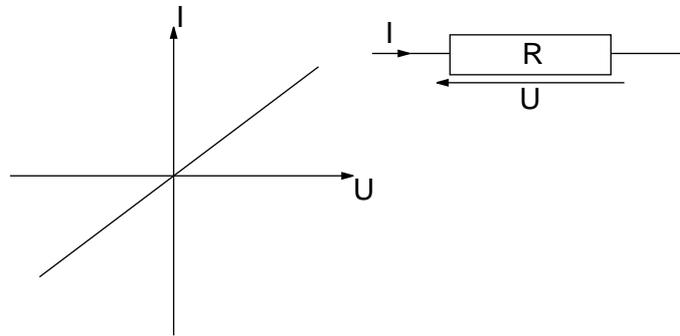
La résistance, ou résistor

La tension à ses bornes est proportionnelle au courant la traversant, la constante de proportionnalité est alors appelée résistance et se mesure en Ohms (Ω). La caractéristique d'un tel dipôle, en convention récepteur, est bien entendu : $U = RI$ et sa représentation est :

La bobine idéale

L'étude de ce dipôle a été faite en classe de terminale, et l'on sait en particulier que les phénomènes d'induction dont elle est le siège donnent à la bobine la caractéristique $u(t) = L \frac{di}{dt}$ où L est appelée inductance et se mesure en Henry. En régime permanent, i est une fonction constante du temps, et on bien sûr $u(t) = 0$ à tout instant.

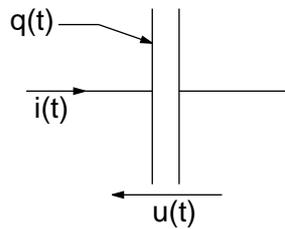
Ce dipôle est généralement étudié en convention récepteur.



Le condensateur idéal

Il est constitué de deux armatures séparées par un isolant et, si l'on note $q(t)$ la charge à l'instant t de l'armature où arrive le courant, on a : $q(t) = Cu(t)$ où C est appelée capacité et se mesure en Farad.

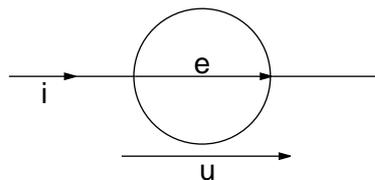
Notons d'ores et déjà que, puisque, par définition, $i(t) = \frac{dq}{dt}$, la caractéristique du condensateur idéal est : $i(t) = C \frac{du}{dt}$.



Les sources indépendantes

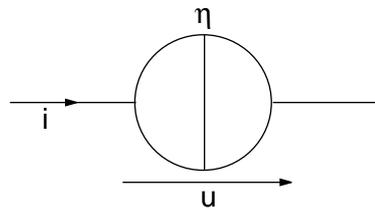
Elles sont traditionnellement représentées en convention générateur. Il existe deux types fondamentaux de sources indépendantes.

- Les sources indépendantes de tension sont représentées comme suit :



La fonction $e(t)$ est appelée force électromotrice du générateur de tension. Elle se mesure en volts, puisque $u(t) = e(t)$ à tout instant. Il est important de comprendre qu'une source indépendante de tension est un dipôle imposant une tension à ses bornes, indépendante du courant qui le traverse.

- Les sources indépendantes de courant sont analogues aux sources de tension, mais, cette fois, c'est le courant traversant le générateur, et non plus la tension à ses bornes, qui est imposé.



Un tel dipôle est caractérisé par son courant électromoteur $\eta(t)$ défini, de manière analogue à la force électromotrice, par $i(t) = \eta(t)$ à tout instant et quel que soit la tension $u(t)$.

Les dipôles linéaires

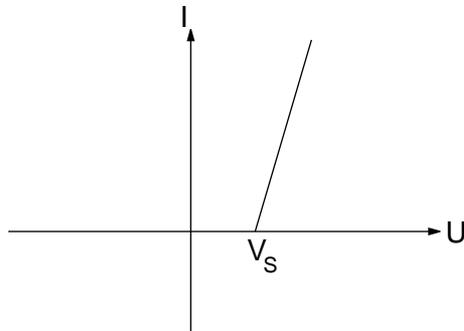
Nous avons vu qu'un dipôle vérifie en général une relation, appelée caractéristique, entre la tension à ses bornes et le courant le traversant. Dans le cas le plus général, cette relation est de la forme $u = f(i)$ ou $i = f(u)$. Pour les composants usuels, on peut souvent mettre ces relations respectivement sous la forme $u(t) = f(i, \frac{di}{dt}, \dots, \frac{d^n i}{dt^n}, t)$, ou évidemment l'écriture symétrique $i(t) = f(u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^n u}{dt^n}, t)$.

Alors, un dipôle est dit linéaire si la fonction f le caractérisant est affine. Tous les composants que nous avons vus en exemple sont linéaires. Une illustration classique de dipôle non linéaire est la diode, dont la caractéristique à l'allure suivante :

3.2.3 Les circuits linéaires : définition et théorèmes

Définition

Ce sont les circuits ne comportant que des dipôles linéaires. Evidemment, cette définition est quelque peu restrictive puisqu'elle exclut tous les circuits contenant des dipôles non linéaires mais se comportant comme si ce n'était pas le cas. On préférera donc une autre définition, équivalente en pratique

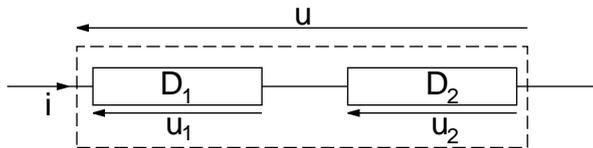


dans les exercices posés en classes préparatoires : un circuit linéaire est un circuit dont le fonctionnement est régi par des équations et des équations différentielles linéaires.

Avant d'énoncer quelques propriétés de ces circuits, il convient d'étudier les lois régissant l'association de dipôles linéaires, puisque ceux-ci sont les constituants élémentaires d'un circuit linéaire.

L'association en série

Deux dipôles sont en série s'ils ont un pôle en commun et qu'ils sont traversés par le même courant :

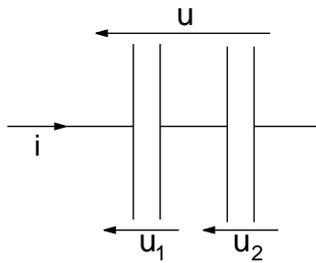


Le point fondamental à noter est que l'association en série de dipôles linéaires est équivalente à un dipôle linéaire. En effet, sur la figure ci-dessus, si $u_1 = f_1(i)$ et $u_2 = f_2(i)$, alors $u = u_1 + u_2 = (f_1 + f_2)(i)$. Donc la caractéristique du dipôle équivalent à l'association en série de D_1 et D_2 est $f = f_1 + f_2$ qui, comme somme deux applications affines, est affine.

Voyons maintenant un exemple d'association en série : celle de deux condensateurs idéaux C_1 et C_2 représentés sur la ci-dessous.

Rechercher le dipôle équivalent à cette association revient à déterminer la caractéristique liant u et i . Or, pour les deux condensateurs, on a :

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{1}{C_1}i$$



$$\frac{du_2}{dt} = \frac{1}{C_2}i$$

Ce qui implique que :

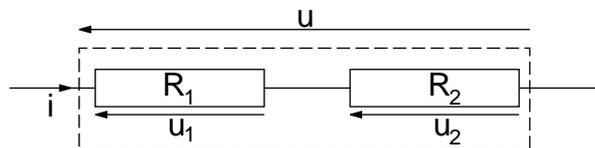
$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{d(u_1 + u_2)}{dt} \\ &= \frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} \\ &= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)i \end{aligned}$$

Or un condensateur idéal de capacité C vérifie la relation $\frac{du}{dt} = \frac{1}{C}i$. Ainsi, l'association en série de deux condensateurs de capacités respectives C_1 et C_2 est équivalente à un condensateur de capacité C telle que :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Nous verrons en exercices d'autres exemples d'associations en série de dipôles linéaires.

Avant de nous intéresser à l'association en parallèle, attardons nous quelques instants sur l'association en série de deux résistances R_1 et R_2 (voir figure).



La loi des noeuds nous apprend que $u = u_1 + u_2$. Ecrivons par ailleurs la relation liant tension et intensité pour R_1 et R_2 .

$$u_1 = R_1 i$$

$$u_2 = R_2 i$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} u &= R_1 i + R_2 i \\ &= (R_1 + R_2) \frac{u_2}{R} \end{aligned}$$

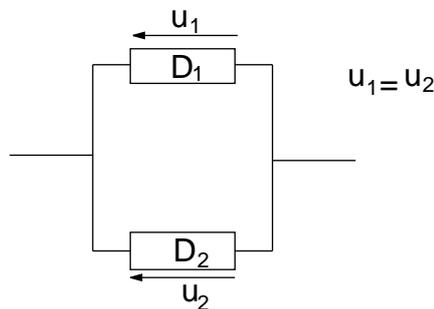
Finalement :

$$u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u$$

Ce montage s'appelle un *pont diviseur de tension* : il donne en sortie (u_2) une tension proportionnelle à la tension u d'entrée, la constante de proportionnalité pouvant être réglée arbitrairement par les valeurs de R_1 et R_2 .

L'association en parallèle

Deux dipôles sont associés en parallèle s'ils sont reliés aux deux mêmes noeuds et si la tension à leurs bornes est la même :

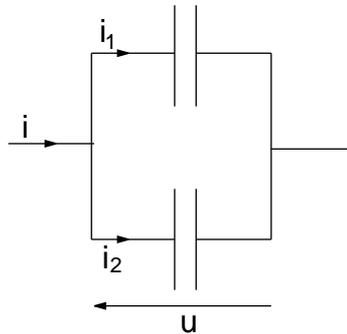


Comme pour les associations en série, l'association en parallèle de deux dipôles linéaires est un dipôle linéaire. En effet, si $i_1 = f_1(u)$ et $i_2 = f_2(u)$, alors $i = i_1 + i_2 = (f_1 + f_2)(u) = f(u)$.

Reprenons l'exemple des deux condensateurs, mais associons les cette fois en parallèle :

La méthode est tout à fait la même que dans le cas de l'association en série. Ecrivons donc la caractéristique de chacun des deux condensateurs :

$$\begin{aligned} i_1 &= C_1 \frac{du}{dt} \\ i_2 &= C_2 \frac{du}{dt} \end{aligned}$$



Alors $i = i_1 + i_2 = (C_1 + C_2) \frac{du}{dt}$

L'association en parallèle de deux condensateurs de capacités respectives C_1 et C_2 est donc équivalente à un condensateur de capacité $C_1 + C_2$.

Quelques théorèmes relatifs aux circuits linéaires

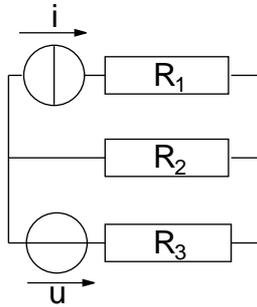
Nous allons énoncer ici trois théorèmes fondamentaux intervenant très fréquemment lorsqu'on s'intéresse à des circuits linéaires.

Le théorème de superposition Imaginons un circuit linéaire comportant plusieurs générateurs de tension et/ou de courant, pour lequel on souhaite connaître la tension ou l'intensité aux bornes de l'un des dipôles \mathcal{D} le constituant. Le théorème de superposition affirme que la tension aux bornes de \mathcal{D} (ou l'intensité traversant \mathcal{D}) peut se calculer de la manière suivante :

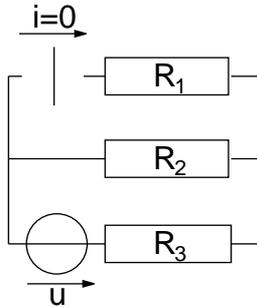
1. On éteint toutes les sources de courant et de tension sauf une, sachant qu'éteindre une source de tension revient à la remplacer par un fil et qu'éteindre une source de courant revient à ouvrir le circuit (c'est-à-dire à la remplacer par un interrupteur ouvert). On calcule alors la grandeur en question, c'est-à-dire la tension aux bornes de \mathcal{D} ou le courant le traversant.
2. On réitère l'opération autant de fois qu'il y a de sources de courant et de tension dans le circuit.
3. La grandeur recherchée est alors la somme des différentes grandeurs obtenues à chacune des opérations précédentes.

Voyons un exemple :

Supposons que l'on cherche à déterminer la tension u_2 aux bornes de la résistance R_2 , et appliquons pour cela le théorème de superposition. Ce circuit compte deux générateurs : un générateur de courant et un générateur



de tension. Commençons par exemple par éteindre le générateur de courant, ce qui revient à le remplacer par un interrupteur ouvert :



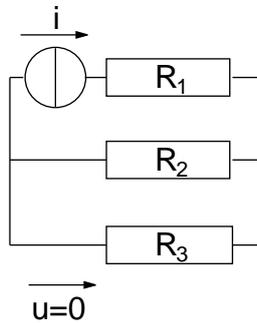
Le courant traversant R_1 est alors nul, et l'on obtient un pont diviseur de tension, ce qui fournit immédiatement :

$$u_2 = \frac{R_2}{R_2 + R_3} u$$

La première étape est terminée. Passons à la seconde, qui consiste à éteindre le générateur de tension (et, bien évidemment, à rallumer le générateur de courant).

Avec des notations évidentes, $i_2 + i_3 = i$, d'après la loi des noeuds. D'autre part, les tensions aux bornes de R_2 et R_3 sont égales puisque ces deux résistances sont associées en parallèle. D'après la loi d'Ohm, on a donc $R_2 i_2 = R_3 i_3$. Reste à remplacer i_3 par $i - i_2$ pour obtenir i_2 :

$$\begin{aligned} R_2 i_2 &= R_3 (i - i_2) \\ i_2 (R_2 + R_3) &= R_3 i \\ i_2 &= \frac{R_3}{R_2 + R_3} i \end{aligned}$$



Au passage, ce court calcul nous a permis d'établir une règle analogue à celle des ponts diviseurs de tension : l'association en parallèle de deux résistances constitue un pont diviseur de courant.

Connaissant i_2 , nous en déduisons la tension u_2 par $u_2 = R_2 i_2 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} i$

Nous avons calculé les deux tensions nécessaires à l'application du théorème de superposition. Il nous suffit maintenant de les ajouter :

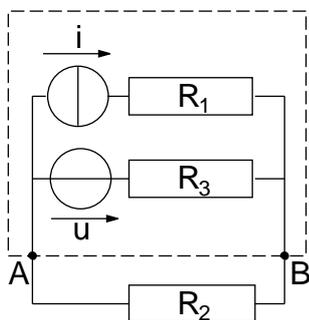
$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} i + \frac{R_2}{R_2 + R_3} u \\ &= \frac{R_2}{R_2 + R_3} (u + R_3 i) \end{aligned}$$

Le théorème de Thévenin Supposons que nous étudions un circuit linéaire relativement complexe, c'est-à-dire comportant de nombreux dipôles. On peut souhaiter décomposer ce circuit en plusieurs sous-circuits dont on connaîtrait les caractéristiques de manière simple. C'est ce que permet le théorème de Thévenin et, de manière analogue, le théorème de Norton que nous verrons plus loin. En pratique, le théorème de Thévenin affirme que, vu de deux points A et B, un circuit linéaire se comporte exactement de la même façon que l'association en série d'une source idéale de tension de force électromotrice E et d'une résistance R, où :

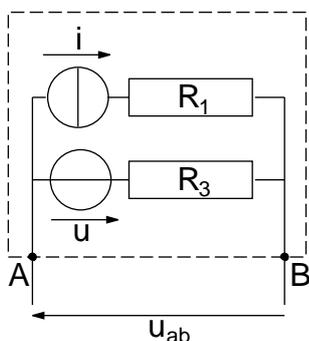
- E est la tension entre A et B lorsque le circuit fonctionne à vide
- R est la résistance équivalente au circuit obtenu en éteignant toutes les sources, de courant et de tension

Afin d'illustrer ceci, reprenons l'exemple précédent, en le schématisant différemment (mais de manière tout à fait équivalente) :

Le circuit encadré en pointillés est linéaire et, d'après le théorème de Thévenin, peut être vu des deux points A et B comme l'association en série d'un générateur idéal de tension de f.e.m. E et d'une résistance R. Calculons



E et R . E est la tension aux bornes du circuit à vide, c'est-à-dire la tension entre A et B obtenue en remplaçant R_2 par un interrupteur ouvert.



Le courant traversant R_3 est alors égal à i et la tension u_{AB} est égale à :

$$u_{AB} = -(u + R_3 i)$$

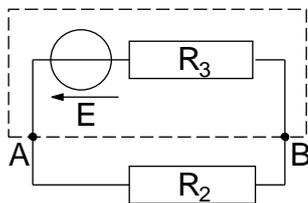
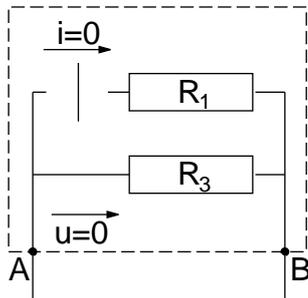
On a donc $E = -(u + R_3 i)$. Reste à calculer R , qui est la résistance équivalente au circuit encadré, sources éteintes.

La détermination de la résistance équivalente est ici particulièrement simple, puisque c'est tout simplement R_3 . Finalement, le circuit considéré est équivalent, d'après le théorème de Thévenin, au réseau suivant :

Notez bien que la force électromotrice E est orientée dans le même sens que u_{AB} : dans le cas contraire, il faudrait introduire un signe moins...

Une fois menées à bien toutes ces manipulations, la tension aux bornes de R_2 se calcule aisément, en remarquant par exemple que l'on a affaire à un pont diviseur de tension :

$$u_2 = -\frac{R_3}{R_2 + R_3} E$$



$$= \frac{R_3}{R_2 + R_3}(u + R_3 i)$$

On obtient bien le même résultat que précédemment...

Le théorème de Norton Il ressemble beaucoup au théorème de Thévenin : vu de deux points A et B, un circuit linéaire se comporte exactement de la même façon que l'association en parallèle d'une source idéale de courant de courant électromoteur i et d'une résistance R , où :

- i est le courant en court-circuit de A vers B
- R est la résistance équivalente au circuit obtenu en éteignant toutes les sources, de courant et de tension

Nous verrons en exercices des exemples d'application de ce théorème.

3.3 Exercices

3.3.1 Compréhension du cours

Exercice 1. Calculs de courants dans un circuit alimenté par une tension continue

Dans tout l'exercice, \mathcal{D} est un dipôle électrique. Dans chaque question, la nature de ce dipôle change. On demande à chaque fois la valeur du courant traversant le circuit.



1. \mathcal{D} est une résistance R .
2. \mathcal{D} est un condensateur C .
3. \mathcal{D} est une inductance idéale (donc de résistance nulle) L .

Correction

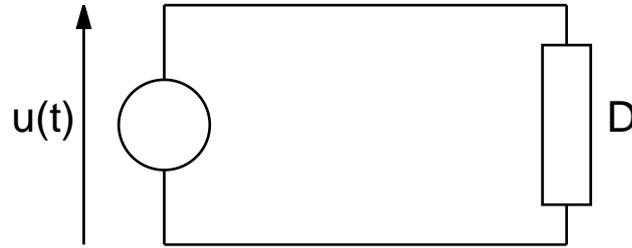
1. Le point de cours à utiliser est bien entendu la loi d'Ohm, qui affirme que la tension U aux bornes d'une résistance R et le courant I le traversant sont liés par la relation $U = RI$. On a donc tout simplement $I = \frac{U}{R}$.
2. La caractéristique d'un condensateur idéal de capacité C est $i = C \frac{dU}{dt}$. Or la tension est ici constante donc sa dérivée par rapport au temps est nulle. Ainsi, $I = 0$: un condensateur soumis à une tension continue se comporte comme un interrupteur ouvert.
3. La caractéristique d'une inductance idéale est $u = L \frac{di}{dt}$, ce qui signifie ici que $\frac{di}{dt} = \frac{U}{L}$. Or $\frac{U}{L}$ est une grandeur indépendante du temps, ce qui implique que $i(t) = \frac{U}{L}t$. Quand t tend vers l'infini, le courant tend lui aussi vers l'infini.

Exercice 2. Calculs de courants dans un circuit alimenté par une tension sinusoïdale

1. Mêmes questions que dans l'exercice précédent, la tension d'alimentation étant cette fois sinusoïdale, de la forme $u(t) = U_0 \sin \omega t$.
2. Que se passe-t-il dans chacun des trois cas envisagés quand la pulsation ω de la tension tend vers l'infini ?

Correction

1. La loi d'Ohm est valable quel que soit le régime, et en particulier pour une tension d'alimentation sinusoïdale. On en déduit que $i(t) = \frac{u(t)}{R}$ à



chaque instant t .

La caractéristique du condensateur idéal fournit $i(t) = C \frac{du(t)}{dt} = CU_0\omega \cos \omega t$.

La caractéristique de la bobine idéale est $u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ donc $\frac{di(t)}{dt} = \frac{u(t)}{L} = \frac{U_0}{L} \cos \omega t$. En supposant qu'à l'instant initial le courant est nul, l'intégration de cette équation fournit $i(t) = \frac{U_0}{L\omega} \sin \omega t$.

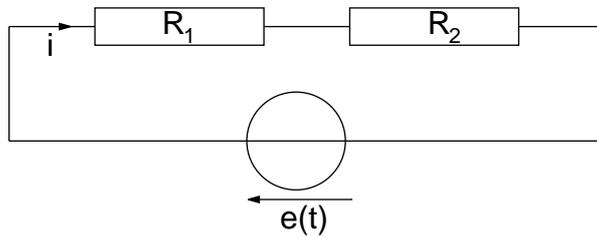
2. On aura compris que les deux cas intéressants sont ceux du condensateur et de l'inductance. En effet, pour la résistance, le courant est égal à la tension à un facteur multiplicatif près.

Le courant traversant le condensateur est une sinusoïde d'amplitude $CU_0\omega$ et de pulsation ω . Quand ω tend vers l'infini, l'amplitude et la période tendent vers l'infini, ce qui revient à dire que le courant tend vers l'infini avec une fréquence infinie.

\sin est une fonction bornée et $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{U_0}{L\omega} = 0$. Quand la pulsation de la tension tend vers l'infini, le courant traversant la bobine tend vers 0. On résume ceci, de manière un peu abusive, en disant que pour des fréquences infinies, l'inductance se comporte comme un interrupteur ouvert.

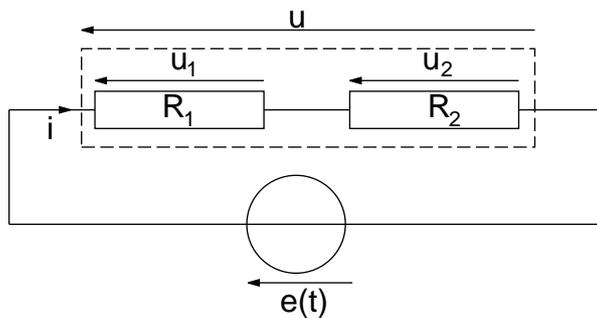
Exercice 3. Associations de dipôles

1. On considère l'association en série de deux résistances alimentées par une source indépendante de tension. Montrer que cette association est équivalente à une résistance que l'on déterminera.
2. Les résistances sont cette fois associées en parallèle. Même question.
3. Mêmes questions, en remplaçant les résistances par des inductances idéales.



Correction

1. On souhaite montrer que l'association en série de deux résistances est une résistance. Il suffit pour cela de démontrer que la tension u aux bornes du dipôle constitué de ces deux résistances est liée à l'intensité le traversant par la relation $u = Ri$ où R est la grandeur à déterminer.



Or la loi des mailles nous permet d'affirmer que $u = u_1 + u_2$. Comme R_1 et R_2 sont des résistances, on a, par définition, $u_1 = R_1 i$ et $u_2 = R_2 i$. Donc $u = (R_1 + R_2)i$, ce qui achève la démonstration.

2. Le principe est le même : on veut montrer que le dipôle constitué de l'association en parallèle des deux résistances vérifie une relation de la forme $u = Ri$.

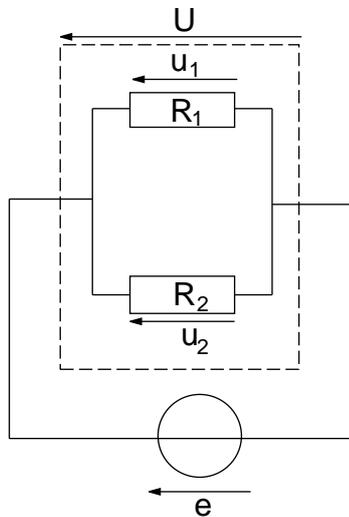
Or cette tension est aussi la tension aux bornes de chacune des deux résistances. Elle vérifie donc $u = R_1 i_1 = R_2 i_2$, avec $i_1 + i_2 = i$, intensité traversant le dipôle.

Partons de la relation $u = R_1 i_1$. Elle peut se réécrire

$$u = R_1 (i - i_2) = R_1 \left(i - \frac{u}{R_2} \right)$$

Finalement :

$$u = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i$$



3. La méthode est encore la même. Dans le cas de l'association en série, les deux inductances sont parcourues par le même courant et la tension à considérer est $u = u_1 + u_2$. Or $u_1 = L_1 \frac{di}{dt}$ et $u_2 = L_2 \frac{di}{dt}$ donc $u = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} = (L_1 + L_2) \frac{di}{dt}$. L'association en série de deux inductances idéales est donc une inductance idéale $L_1 + L_2$.

Dans le cas de l'association en parallèle, on a :

$$\begin{aligned}
 u &= L_1 \frac{di_1}{dt} \\
 &= L_1 \frac{d(i - i_2)}{dt} \\
 &= L_1 \left(\frac{di}{dt} - \frac{di_2}{dt} \right) \\
 &= L_1 \frac{di}{dt} - L_1 \frac{u}{L_2}
 \end{aligned}$$

Finalement, $u = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \frac{di}{dt}$. L'association en parallèle de deux inductances idéales est une inductance idéale $u = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$.

3.3.2 Approfondissement

Exercice 4. Puissance dissipée par les dipôles usuels

On considère un dipôle \mathcal{D} soumis à une tension sinusoïdale $e(t) = e_0 \sin \omega t$, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$. On admettra que la puissance instantanée dissipée par

un dipôle électrique quelconque est $P(t) = u(t)i(t)$ où u et i sont respectivement la tension aux bornes de ce dipôle et le courant le traversant. L'énergie dissipée par \mathcal{D} entre les instants t_1 et t_2 est alors :

$$E = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$$

Quelle est l'énergie dissipée par \mathcal{D} entre les instants 0 et T quand \mathcal{D} est une résistance, un condensateur, puis une inductance ?

Correction

1. \mathcal{D} est ici une résistance R . Elle vérifie donc $u(t) = Ri(t)$ et l'énergie dissipée vaut :

$$\begin{aligned} E &= \int_0^T \frac{1}{R} u^2(t) dt \\ &= \frac{1}{R} \int_0^T e^2(t) dt \\ &= \frac{e_0^2}{R} \int_0^T \sin^2 \omega t dt \end{aligned}$$

Il faut faire appel à la formule de trigonométrie $\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$.
Alors :

$$\begin{aligned} E &= \frac{e_0^2}{2R} \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) dt \\ &= \frac{e_0^2}{2R} \left[t - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right]_0^T \\ &= \frac{e_0^2}{2R} \left(T - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega T \right) \\ &= \frac{e_0^2}{2R} \left(T - \frac{1}{2\omega} \sin \frac{4\pi\omega}{\omega} \right) \\ &= \frac{e_0^2 T}{2R} > 0 \end{aligned}$$

La puissance dissipée par une résistance est donc toujours strictement positive : une résistance parcourue par un courant *chauffe*, par effet Joule.

2. \mathcal{D} est maintenant un condensateur. C'est à dire qu'il vérifie $i(t) = C \frac{du}{dt}$.
L'énergie dissipée s'écrit donc :

$$\begin{aligned} E &= \int_0^T C \frac{du}{dt} u(t) dt \\ &= \frac{C}{2} [u^2(t)]_0^T \\ &= \frac{C}{2} [e^2(t)]_0^T \end{aligned}$$

Or la tension d'alimentation est périodique de période T donc $e^2(T) = e^2(0)$ et $E = 0$.

3. \mathcal{D} étant une inductance, u et i sont reliés par la relation $u(t) = L \frac{di}{dt}$. La tension d'alimentation étant périodique de période T , le courant traversant le circuit l'est aussi. Le même type de calcul que dans la question précédente montre que l'énergie dissipée par l'inductance est nulle.

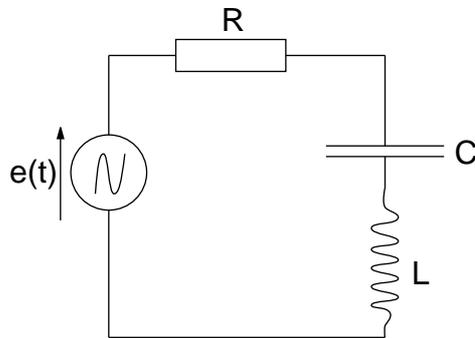
Nous avons donc montré dans le cas d'une tension d'alimentation sinusoïdale que l'énergie dissipée par une résistance est strictement positive tandis qu'elle est nulle pour un condensateur ou pour une inductance. Ce résultat est en fait de portée très générale : c'est-à-dire qu'il est valable quel que soit le régime d'alimentation. Attention cependant : les calculs menés dans cet exercice montrent que la puissance instantanée n'est pas nécessairement nulle. C'est l'énergie moyenne dissipée au cours d'une période qui est nulle. Dans le cas d'une régime d'alimentation quelconque, il n'y a plus de période. On définit alors l'énergie moyenne par l'intégrale ci-dessous :

$$\langle E \rangle = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^\tau u(t)i(t) dt$$

Et on montre que cette limite est bien nulle pour l'inductance et le condensateur et non nulle pour la résistance. Cela se résume en disant que la résistance est un dipôle dissipatif, contrairement au condensateur et à l'inductance.

Exercice 5. Etude du circuit R,L,C série

L'objet de cet exercice est l'étude du comportement de l'association en série d'une résistance, d'un condensateur idéal et d'une bobine idéale alimentés par une tension sinusoïdale $e(t) = e_0 \cos \omega_0 t$



1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'intensité i du courant dans le circuit. La mettre sous la forme :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \alpha \frac{di}{dt} + \beta i = \gamma \frac{de}{dt},$$

où α , β et γ sont des constantes dépendant des paramètres du circuit que l'on déterminera.

2. On suppose dans cette question que la résistance est nulle, et que l'on éteint à l'instant t_0 la source de tension. Quelle est l'évolution du courant dans le circuit ?
3. Dans cette question, R n'est plus nulle. On éteint encore la source de tension à l'instant t_0 . Comment le courant évolue-t-il (on se contentera d'une réponse qualitative basée sur des considérations physiques) ?

Correction

1. Le plus simple est d'utiliser le théorème des mailles, qui affirme que la tension aux bornes du dipôle constitué de l'association en série des trois dipôles est la somme des tensions aux bornes de chacun de ces dipôles :

$$e(t) = u_R(t) + u_C(t) + u_L(t)$$

Or $u_R(t) = Ri(t)$, $u_C(t) = \frac{q(t)}{C}$, où C est la capacité du condensateur et $u_L(t) = L \frac{di}{dt}$. On obtient donc l'équation :

$$e(t) = Ri(t) + \frac{q(t)}{C} + L \frac{di}{dt}$$

La charge q du condensateur ne nous intéresse pas. Il faut donc l'éliminer en faisant apparaître l'intensité i . Or l'intensité traversant un

condensateur est liée à la charge de celui-ci par la relation $i(t) = \frac{dq}{dt}$.
 Dérivons donc notre équation :

$$\frac{de}{dt} = R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i(t) + L \frac{d^2 i}{dt^2}$$

Il ne reste plus qu'à mettre cette équation sous la forme demandée, en divisant par L :

$$\frac{1}{L} \frac{de}{dt} = \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i(t)$$

2. On suppose que $R = 0$. L'équation devient alors :

$$\frac{1}{L} \frac{de}{dt} = \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{LC} i(t)$$

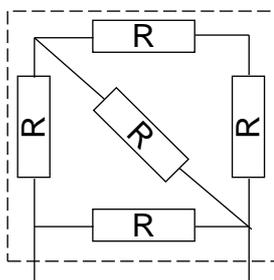
De plus, la source de tension est éteinte à l'instant t_0 , ce qui signifie qu'à partir de cet instant, $e(t) = 0$. L'équation s'écrit donc :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{LC} i(t) = 0$$

C'est une équation différentielle du second ordre à résoudre. Heureusement, il n'y a pas de terme du premier ordre (en $\frac{di}{dt}$) donc la résolution est immédiate en faisant appel à ses souvenirs de terminale. En posant $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, l'intensité s'écrit :

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi)$$

3. On demande une réponse qualitative. Il faut remarquer que l'introduction de la résistance induit une déperdition d'énergie. En effet, le condensateur idéal et la bobine idéale ne dispersent pas d'énergie, contrairement à la résistance (voir exercice précédent). Dans ce nouveau circuit, il y a donc pertes d'énergie et aucun apport extérieur, puisque la source de tension est éteinte. Cela implique que courant et tensions finissent par s'annuler. On montre en pratique qu'il existe différents régimes d'évolution, liés principalement à l'importance de la dispersion d'énergie (donc à la valeur de la résistance) par rapport à la pulsation propre ω du circuit. Cette étude passe malheureusement par la résolution d'équations différentielles nécessitant un bagage mathématique dont nous ne disposons pas ici.



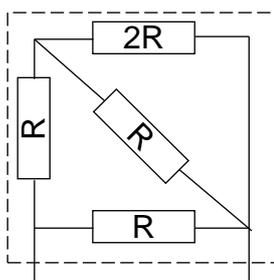
Exercice 6. Calcul d'une résistance équivalente

On considère l'association de cinq résistances schématisée ci-dessous.

Quelle est la résistance équivalente à cette association ? (en d'autres termes : si l'on applique au dipôle une tension quelconque U , celui-ci est parcouru par un courant I tel que $U = R_{eq}I$. Comment s'exprime R_{eq} en fonction de R ?). La résolution préalable de l'exercice 3 est profitable.

Correction

Commençons par simplifier ce qui peut l'être. Les deux résistances respectivement sur le côté haut et sur le côté droit du carré sont en fait en série. Leur association est donc une résistance de valeur $2R$. On obtient le schéma suivant :

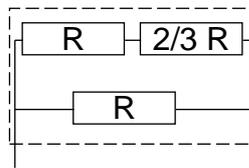
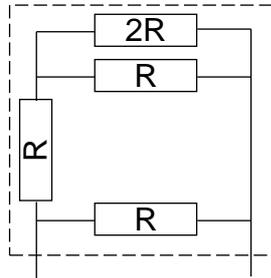


ou encore :

Les deux résistances du haut sont associées en parallèle. Leur résistance équivalente est donc $R' = \frac{2R \cdot R}{2R+R} = \frac{2}{3}R$.

Le schéma devient alors :

Les deux résistances du haut sont en série : leur résistance équivalente est la somme des deux résistances, c'est-à-dire $\frac{5}{3}R$. Le circuit se réduit finalement

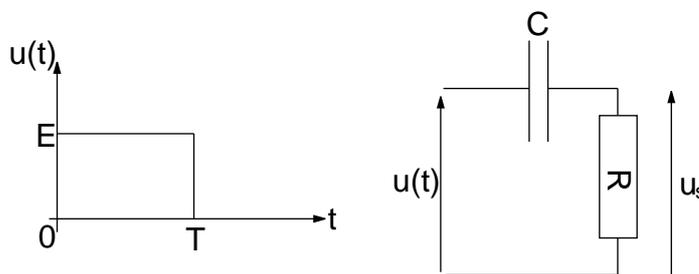


à l'association en parallèle de deux résistances dont la résistance équivalente se détermine aisément :

$$\begin{aligned}
 R_{eq} &= \frac{\frac{5}{3}R \cdot R}{\frac{5}{3}R + R} \\
 &= \frac{5}{8}R
 \end{aligned}$$

Exercice 7. Réponse d'un circuit RC série à un créneau de tension

Le circuit étudié est représenté ci-dessous. Il est soumis à une tension d'excitation $u(t)$ constante égale à 0 jusqu'à $t = 0$ puis à E entre 0 et T et enfin nulle à partir de $t = T$.



1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée à chaque instant par $u_s(t)$. On pourra poser $\tau = RC$.

2. Que vaut u_s immédiatement après l'établissement d'une tension non nulle ? Cette valeur sera notée $u_s(0^+)$.
3. En déduire l'expression de $u_s(t)$ pour $0 \leq t \leq T$.
4. Calculer $u_s(t)$ pour $t \geq T$.

Correction

1. Notons $i(t)$ l'intensité du courant traversant le circuit. R étant une résistance, $u_s(t) = Ri(t)$.
D'autre part, la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur et le courant $i(t)$ le traversant sont liés par la relation $i(t) = C \frac{du_C}{dt}$. La loi des mailles nous permet d'affirmer que $u_C(t) + u_s(t) = u(t)$ et donc :

$$\begin{aligned} u_s(t) &= RC \frac{d(u(t) - u_s(t))}{dt} \\ &= \tau \left(\frac{du}{dt} - \frac{du_s}{dt} \right) \end{aligned}$$

Si l'on se place à un instant t différent de 0 et de T , u est constante donc sa dérivée est nulle. On obtient donc l'équation différentielle recherchée :

$$\frac{du_s}{dt} + \frac{1}{\tau} u_s(t) = 0$$

2. Le point important est que la tension aux bornes d'un condensateur est nécessairement continue. En effet, $i = C \frac{du_C}{dt}$ donc une discontinuité de u_C impliquerait une intensité infinie.
Ainsi, $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$. Or $u(t) = u_C(t) + u_s(t)$ donc $u_s(0^+) = u(0^+) - u_C(0^+) = u(0^+) = E$.
3. La solution générale de l'équation différentielle établie en 1 est $u_s(t) = u_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, où u_0 est une constante à déterminer en fonction des conditions initiales. L'objet de la question précédente était justement l'évaluation de la condition initiale.
 u_0 est alors tel que $u_s(0) = E$. Finalement, $u_0 = E$ et, pour $0 \leq t \leq T$, la tension de sortie s'écrit :

$$u_s(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}$$

4. L'équation différentielle reste valable : seule change la condition initiale qu'il faut déterminer. Là encore, on utilise la continuité de la tension aux bornes du condensateur. D'après la question 3, $u_s(T^-) = E e^{-\frac{T}{\tau}}$ donc $u_C(T^-) = u(T^-) - u_s(T^-) = E - E e^{-\frac{T}{\tau}}$.

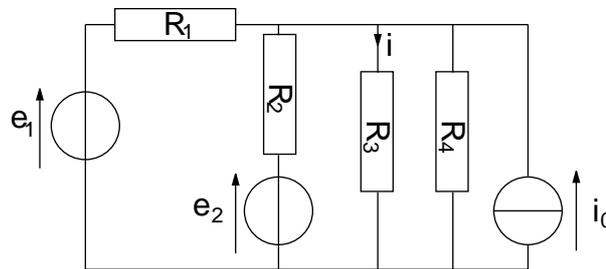
On en déduit que $u_s(T^+) = u(T^+) - u_C(T^+) = u(T^+) - u_C(T^-)$ par continuité de u_C . Donc $u_s(T^+) = 0 - E + Ee^{-\frac{T}{\tau}}$.

Finalement :

$$u_s(t) = E \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 \right) e^{\frac{t-T}{\tau}}$$

Exercice 8. Courant dans une branche d'un circuit linéaire

Soit le circuit schématisé ci-dessous. On demande de déterminer le courant i traversant R_3 . On utilisera pour cela le théorème de Norton.



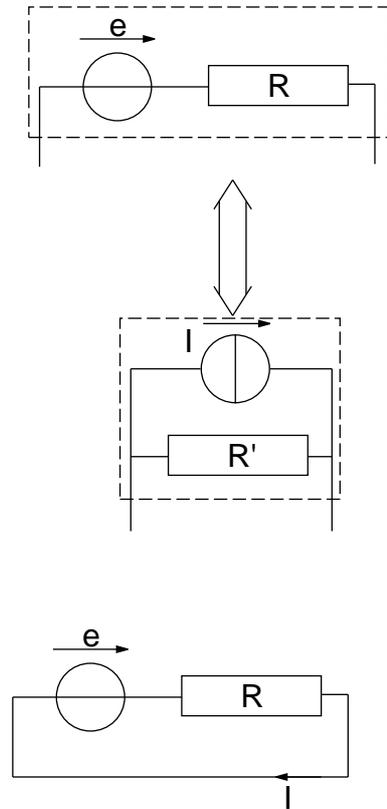
Correction

On conseille d'utiliser le théorème de Norton. Celui-ci affirme que tout dipôle linéaire est équivalent à l'association en parallèle d'un générateur de courant et d'une résistance. L'idée est donc de rendre notre circuit équivalent à une association en parallèle de résistances et de générateurs de courant. Connaissant l'intensité délivrée par chaque générateur, le courant traversant R_3 sera aisé à déterminer.

Seules posent problème les deux associations en série d'un générateur de tension et d'une résistance. On peut donc se poser la question d'ordre plus général suivante : quel est le dipôle de Norton équivalent à l'association en série d'un générateur de tension et d'une résistance? En d'autres termes, quelles sont les valeurs du générateur de courant et de la résistance dont l'association en parallèle est équivalente à l'association en série considérée?

D'après le théorème de Norton, R' est la résistance équivalente au circuit obtenu en éteignant toutes les sources. Éteindre une source de tension revient à la remplacer par un fil. La résistance recherchée est donc $R' = R$.

La valeur de l'intensité délivrée par la source de courant est le courant circulant dans le circuit lorsqu'il est mis en court-circuit :



Il est clair que $I = \frac{e}{R}$.

L'application de cette étude préliminaire à notre exercice nous permet de dessiner un circuit équivalent au circuit de départ :

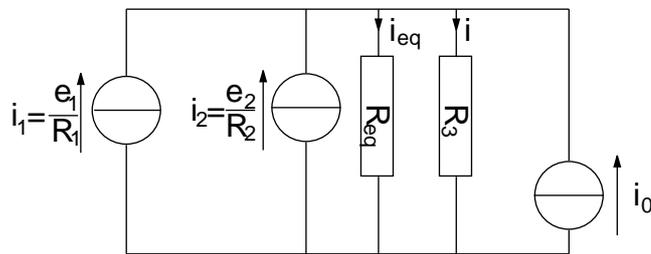
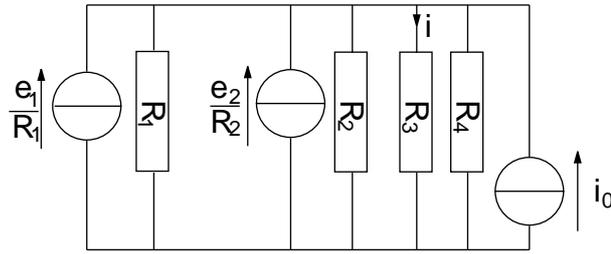
Il suffit alors de remarquer que R_1 , R_2 et R_4 sont des résistances en parallèle. On vérifiera (en calculant d'abord la résistance équivalente à l'association en parallèle de R_1 et de R_2 , par exemple) que la résistance équivalente à cette association en parallèle est

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2 R_4}{R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_2 R_4}$$

Dès lors, la tension aux bornes de R_{eq} est égale à celle aux bornes de R_3 puisque ces deux résistances sont en parallèle. On obtient donc pour les courants : $R_3 i = R_{eq} i_{eq}$. Or, d'après la loi des noeuds, $i_1 + i_2 + i_0 = i_{eq} + i$. Ainsi, $R_3 i = R_{eq} (i_1 + i_2 + i_0 - i)$.

On peut maintenant conclure :

$$i = R_{eq} \frac{i_1 + i_2 + i_0}{R_3 + R_{eq}}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{i_1 + i_2 + i_0}{\frac{R_3}{R_{eq} + 1}} \\
 &= \frac{i_0 + \frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2}}{1 + R_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right)}
 \end{aligned}$$

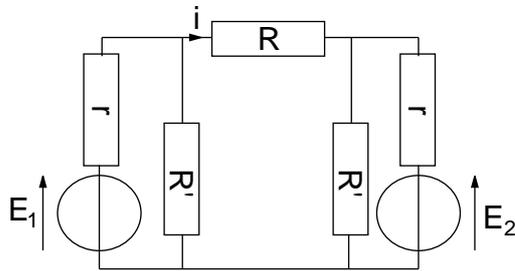
Exercice 9. Utilisation du théorème de superposition

Soit le circuit schématisé ci-dessous.

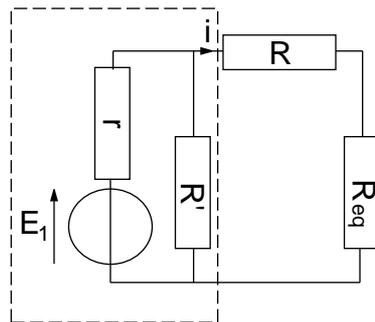
Calculer i . Pour cela, il pourra être pratique d'appliquer le théorème de superposition et le théorème de Thévenin.

Correction

Nous allons appliquer le théorème de superposition, valable puisque le circuit étudié est constitué exclusivement de dipôles linéaires. Le principe consiste, comme on l'a vu en cours, à éteindre successivement toutes les sources de tension et de courant sauf une. Il n'y a ici que deux sources de tension. Commençons par exemple par éteindre E_2 .



Eteindre une source de tension revient à la remplacer par un fil. Les deux résistances les plus à droite sont alors en parallèle et la résistance équivalente vaut $R_{eq} = \frac{rR'}{r+R'}$. Le circuit devient alors :



L'idée est que la résistance R' qui reste nous complique la tâche : sans elle, nous aurions une simple association en série de résistances et la détermination du courant serait immédiate. Nous allons donc appliquer le théorème de Thévenin au dipôle encadré en pointillés.

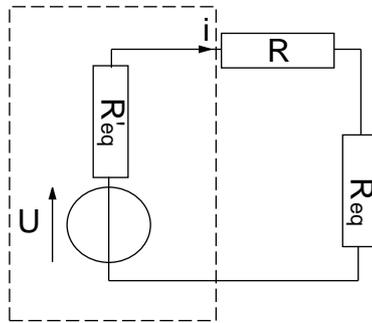
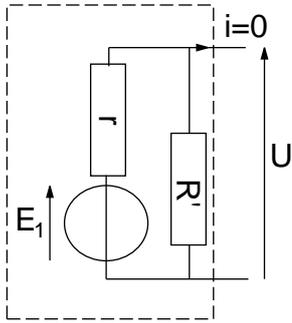
La tension délivrée par le générateur de tension est la U tension à vide.

C'est un pont diviseur de tension et $U = \frac{R'}{r+R'} E_1$.

Quant à la résistance, c'est la résistance du dipôle lorsqu'on éteint toutes les sources. Ici, c'est donc la résistance équivalente à l'association en parallèle de r et de R' :

$$R'_{eq} = \frac{rR'}{r+R'}$$

Le circuit est finalement le suivant :



Dès lors, l'intensité est :

$$\begin{aligned}
 i_1 &= \frac{U}{R + R_{eq} + R'_{eq}} \\
 &= \frac{R'}{2rR' + RR' + rR} E_1
 \end{aligned}$$

Il reste maintenant à éteindre la source E_2 . Heureusement, le circuit est symétrique en E_1 et en E_2 et on voit que :

$$i_2 = -\frac{R'}{2rR' + RR' + rR} E_2$$

En conclusion,

$$i = \frac{R'}{2rR' + RR' + rR} (E_1 - E_2)$$

Chapitre 4

Electromagnétisme

L'électromagnétisme s'attache à expliquer et à décrire les phénomènes physiques mettant en jeu les forces électrique et magnétique. Si ces deux types de forces sont étudiés dans le cadre d'une même discipline, c'est que, comme nous allons le voir, elles sont liées. Nous allons étudier dans ce chapitre l'électrostatique et la magnétostatique, qui étudient les champs électriques et magnétiques statiques, c'est-à-dire constants au cours du temps.

4.1 Notion de charge

Ce qui fait le lien entre forces électriques et magnétiques, c'est la notion de charge électrique. De la même façon qu'un objet massif est soumis à la force gravitationnelle, un objet chargé électriquement est soumis à la force électrique et, sous certaines conditions que nous envisagerons, à la force magnétique.

4.1.1 Les particules chargées

Pour introduire la notion de particule chargée, il est pratique de considérer l'expérience classique suivante : on frotte vigoureusement une règle en plastique sur un morceau de tissu, puis on l'approche de petits bouts de papier. Ceux-ci ont tendance à rester coller à la règle. Ils sont donc soumis à une force exercée par la règle. Cette force est la force électrique et s'explique par l'existence de charges. En effet, la règle est constituée d'atomes, eux-même formés d'un noyau (proton et neutrons) entouré d'un nuage électronique. Le fait de frotter la règle arrache des électrons à certains des atomes la constituant. En quoi cela permet-il de comprendre l'attraction exercée sur les bouts de papier ? Les électrons ont une charge négative, les protons sont

eux positifs. Initialement, la charge de la règle est nulle : il y a autant de charges positives que de charges négatives. Lorsqu'on arrache des électrons, elle devient positive : il y a moins de charges négatives que de charges positives. Or, les bouts de papier sont eux aussi formés d'atomes, c'est-à-dire de noyaux positifs entourés d'un nuage d'électrons chargés négativement. Du fait de leur position périphérique, ces électrons interagissent préférentiellement avec l'entourage (ici la règle). La règle (chargée positivement) interagit donc avec les électrons du papier (chargés négativement) : cette interaction est une force attractive. C'est la même que celle expliquant la cohésion des atomes : les électrons négatifs sont attirés par les protons positifs.

Nous n'avons évidemment rien démontré par cette expérience, mais il suffit d'admettre que, de même qu'il existe une force gravitationnelle liée à la masse des corps en interaction, il existe une force électrique liée à la charge des corps en présence. La masse s'exprime en kilogrammes (kg) et est toujours positive, tandis que la charge s'exprime en Coulomb (C) et peut être négative ou positive. Si les charges de deux corps sont de signes opposés, ces deux corps s'attirent. Si les deux charges sont de même signe, ils se repoussent.

Il est remarquable que cette analogie ne soit pas seulement qualitative, mais aussi, dans une certaine mesure, quantitative. On sait que la force exercée par un corps de masse m_1 sur un corps de masse m_2 , à une distance r est :

$$\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} = \mathcal{G} m_1 m_2 \frac{\overrightarrow{u}}{r^2}$$

On observe que, dans le vide, la force exercée par un corps de charge q_1 sur un corps de charge q_2 à la distance r est :

$$\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \frac{\overrightarrow{u}}{r^2},$$

où ϵ_0 , appelé permittivité électrique du vide, est tel que $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9 SI$.

Deux remarques s'imposent : d'une part, la force est encore proportionnelle à $1/r^2$; d'autre part les charges et les masses jouent des rôles tout à fait analogues dans chacune des deux formules.

4.1.2 Distributions de charges

La formule vue ci-dessus a l'extrême mérite d'être simple. Malheureusement, elle ne s'applique qu'au cas où les deux charges en question sont ponctuelles, qui est rarement celui étudié en pratique. Il nous faut donc aborder la notion de distribution de charge, qui permettra d'introduire de nouvelles formules plus générales.

Charge volumique

Soit un volume V contenant une charge électrique totale Q répartie uniformément. La densité volumique de charge, notée ρ est définie par $\rho = Q/V$. Elle est à la charge ce que la masse volumique est à la masse. Mais cette définition n'est pas totalement satisfaisante car elle impose une répartition uniforme de la charge. On pourrait bien sûr s'affranchir de cette hypothèse en définissant une densité volumique *moyenne*, mais cela ne servirait qu'à reporter la résolution du problème à plus tard, au moment d'énoncer les formules que nous cherchons à établir.

La bonne solution est de définir une grandeur locale. Considérons en effet le même volume v centré en un point M , et contenant une charge q répartie cette fois de manière quelconque. Faisons alors tendre v vers zéro, tout en restant centré sur M . A mesure que v tend vers zéro, q tend lui aussi vers zéro pour peu qu'aucune charge ponctuelle ne soit placée en M . Par définition, la densité volumique locale de charge en M est, s'il existe, le nombre

$$\rho = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{q}{v} = \frac{dq}{dv}$$

Notons que, dans le cas d'une répartition homogène de la charge, cette définition locale donne bien la même densité que la première définition proposée ci-dessus.

Charge surfacique

Le principe est le même. On considère cette fois une surface s centrée en M et contenant une charge q . On note alors σ la densité surfacique locale de charge, définie, si elle existe, par

$$\sigma = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{q}{s} = \frac{dq}{ds}$$

Charge linéique

Soit une courbe (une ligne de l'espace) de longueur l centrée en M et contenant une charge q . On note λ la densité linéique locale de charge définie, si elle existe, par

$$\lambda = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{q}{l} = \frac{dq}{dl}$$

On peut se demander quel est l'intérêt d'étudier de telles distributions (surfacciques et linéiques), puisque tout objet physique a trois dimensions non nulles : une feuille de papier, par exemple, a une épaisseur non nulle, de même

qu'un fil électrique a un diamètre non nul, aussi petit soit il. Toutefois, dans de nombreuses situations, on pourra assimiler ces deux objets respectivement à un plan et à une ligne. Ce n'est qu'une approximation, et elle sera d'autant meilleure que l'épaisseur du papier et le diamètre du fil seront faibles devant leurs autres dimensions.

4.1.3 Distribution de courant

Nous avons vu dans le chapitre sur l'électrocinétique qu'un courant électrique est un mouvement à moyenne non nulle de charges électriques. Dans le cadre de l'électromagnétique, il est utile d'étudier les caractéristiques géométriques d'un tel mouvement, c'est-à-dire en quelques sortes de chercher à connaître l'intensité du courant en chaque point de la zone considérée. Précisons cela.

Distribution volumique

Considérons donc un mouvement d'ensemble de particules de charge q , tel que n_v particules par unité de volumes se déplacent à la vitesse \vec{v} . On appelle densité volumique de charge mobile la quantité $\rho = n_v q$ et vecteur densité volumique de courant le vecteur $\vec{j}_v = n_v q \vec{v} = \rho \vec{v}$.

Distribution surfacique

La zone étudiée est cette fois une surface. Un mouvement d'ensemble de particules chargées peut alors se caractériser par : leur charge q , le nombre de particules par unité de surface n_s et leur vitesse \vec{v} . De manière analogue à ce qui a été présenté ci-dessus, on définit la densité surfacique de charge mobile $\sigma = n_s q$ et le vecteur densité surfacique de courant $\vec{j}_s = \sigma \vec{v}$.

Distribution linéique

Lorsqu'on étudie le champ créé par un courant circulant dans un fil pouvant être assimilé à une ligne, on caractérise le mouvement de charge par la charge q de chaque particule, le nombre n_l de particules par unité de longueur et leur vitesse \vec{v} . On définit alors la densité linéique de charge mobile $\lambda = n_l q$ et le courant $i = \lambda \vec{v}$.

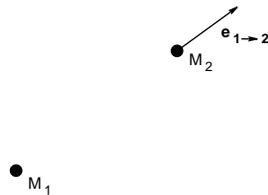
4.2 Le champ électrostatique

Supposons maintenant connue la distribution de charges. On voudrait en déduire les caractéristiques du champ électrique créé par cette distribution. La première méthode envisageable est l'utilisation de la loi de Coulomb, vue au lycée, et qui exprime le champ créé par une particule ponctuelle chargée. Il est possible d'étendre sa validité à un système de particules chargées. Mais nous verrons qu'il est souvent pratique, lorsque les caractéristiques géométriques de la distribution de charges le permettent, d'utiliser le théorème de Gauss.

4.2.1 Loi de Coulomb

Champ créé par une particule ponctuelle

Soit deux points M_1 et M_2 dans le vide. Supposons qu'en M_1 est placée une particule chargée ponctuelle de charge q_1 .



La loi de Coulomb nous dit alors que le champ créé en M_2 par la charge placée en M_1 est :

$$\overrightarrow{E_{1 \rightarrow 2}} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{e_{1 \rightarrow 2}}}{M_1 M_2^2}$$

Champ créé par un système de particules

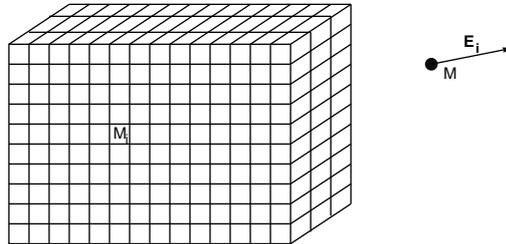
L'expression du champ créé par un système de n charges ponctuelles q_i placées en les points M_i découle d'une loi appelée principe de superposition, qui affirme qu'en un point M , ce champ est la somme des n champs qui seraient créés par chacune des charges q_i si elle était seule. Ce principe nous donne le champ créé par le système Σ des n charges :

$$\overrightarrow{E}_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{e_{i \rightarrow M}}}{M_i M^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\overrightarrow{M_i M}}{M_i M^3}$$

Cette formule est déjà plus complexe que la loi de Coulomb proprement dite, mais son domaine d'application reste restreint. Supposons que le problème considéré soit celui d'une plaque de métal chargée. Il est impensable de compter les électrons un à un et de déterminer leur position : il nous faut une formule donnant le champ créé à partir de la distribution de charges, c'est-à-dire des densités de charge. Pour cela, nous allons partir de la formule qui vient d'être établie et utiliser un procédé très courant en physique.

Considérons un domaine géométrique \mathcal{D} qui peut être aussi bien un volume, qu'une surface ou une ligne. Pour fixer les idées, supposons que \mathcal{D} soit un volume. La méthode consiste à décomposer ce volume en une juxtaposition de sous-volumes dont on fait tendre la taille vers 0 et le nombre vers $+\infty$. On considère que, à la limite, chacun de ces sous-volumes agit de même qu'une particule ponctuelle (puisque son volume est 0). A la limite, donc, on peut appliquer la loi de Coulomb qui affirme que le champ en M est la somme des champs créés par chacun des sous-volume s'il était seul. Que vaut \vec{E}_i ?



Notons dv_i le volume de la zone entourant M_i ($dv_i \rightarrow 0$) et ρ_i la densité volumique de charge en M_i . La charge de la zone entourant M_i est $dq_i = \rho_i dv_i$, qui tend aussi vers zéro. Le champ créé par cette zone est donc :

$$d\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho_i \frac{\overrightarrow{M_i M}}{M_i M^3} dv_i$$

Le champ total est alors la somme de tous les champs dE_i . Or, à la limite, il y a une infinité de sous-volumes dv_i . Cette somme est donc une intégrale, ici sur un volume :

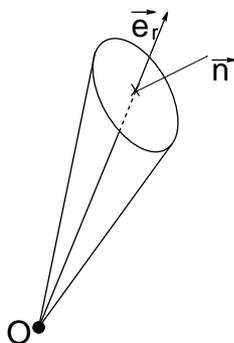
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(P) \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} dv$$

Cette méthode a le mérite de toujours fournir une expression du champ... pour peu qu'on soit capable de calculer l'intégrale! Elle n'est utilisée en pratique que quand ce calcul est non seulement possible, mais simple. Mais voyons maintenant LE théorème auquel il faut penser avant de se lancer dans ces calculs fastidieux.

4.2.2 Le théorème de Gauss

Angle solide et flux à travers une surface

Soit un point O et une surface élémentaire dS de vecteur normal unitaire \vec{n} , à la distance r de O . Soit \vec{e}_r le vecteur unitaire donnant la direction de O à dS .



L'angle solide sous lequel est vue la surface élémentaire dS depuis le point O est par définition :

$$d\Omega = \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{n}}{r^2} dS$$

Imaginons qu'en O soit placée une source de lumière rayonnant avec la même intensité dans toutes les directions (une étoile par exemple) et que la surface dS arrête parfaitement la lumière. Considérons de plus une sphère de centre O et de rayon supérieur à r , c'est-à-dire une sphère contenant à la fois O et la surface dS . Elle est éclairée uniformément par la source placée en O , sauf dans les zones à l'ombre de dS . Vous pouvez vérifier que $d\Omega$ est en fait égal à la surface d'ombre que divise la surface totale de la sphère.

Flux du champ à travers une surface fermée

Soit une surface S fermée, c'est-à-dire délimitant un *intérieur*, de volume fini, et un *extérieur*, de volume infini. Elle peut être décomposée en une

juxtaposition de surfaces élémentaires dS . Soit donc M un point de cette surface, dS l'élément de surface entourant ce point et \vec{n} le vecteur normal à dS (\vec{n} est traditionnellement orienté de l'intérieur vers l'extérieur de S). Soit \vec{M} le champ électrique en M . Alors, le flux élémentaire du champ en M est $d\phi = \vec{E} \cdot \vec{n} dS$, et le flux du champ à travers la surface totale S est la somme des flux élémentaires : c'est donc une intégrale sur la surface S

$$\phi = \int_S d\phi = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS$$

Nous verrons en exercices comment se calculent pratiquement les intégrales sur une surface. Pas de panique toutefois : dans les cas étudiés en classes préparatoires, le calcul se fait toujours en se ramenant à deux intégrales simples.

Le théorème de Gauss

Si S est une surface fermée *quelconque* contenant une charge totale Q_{int} , alors le flux du champ électrique à travers S est égal à $\phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$.

Il faut bien comprendre toute la puissance de ce théorème. Il nous dit que le flux à travers S ne dépend absolument pas de la distribution géométrique de la charge (seule la charge totale compte), ni de la charge présente à l'extérieur de S .

Le théorème de Gauss : utilisation pratique

Le théorème de Gauss est en général utilisé lorsqu'on recherche le champ électrique créé par des charges connues. En effet, si l'on connaît Q_{int} à l'intérieur d'une surface, il nous donne le flux à travers cette surface. Mais comment déduire le champ de la valeur du flux ?

C'est en général une tâche ardue, sauf si la distribution de charges présente des *invariances* intéressantes. Voyons quelques unes des invariances les plus couramment rencontrées (ρ désigne ici la densité de charge, qu'elle soit volumique, surfacique ou linéique) :

- L'invariance par symétrie par rapport à un plan \mathcal{P} : si M est un point quelconque de l'espace et M' sont symétrique par rapport à \mathcal{P} , alors $\rho(M) = \rho(M')$
- L'invariance par translation de direction \vec{d} : si M est un point quelconque de l'espace et M' tel que $\overrightarrow{MM'}$ soit parallèle à \vec{d} , alors $\rho(M) = \rho(M')$
- L'invariance par rotation d'axe Δ : si M est un point quelconque de l'espace et M' son image par rapport à une rotation d'axe Δ et d'angle quelconque, alors $\rho(M) = \rho(M')$

- La symétrie cylindrique d'axe Δ : c'est une invariance à la fois par translation de direction Δ et par rotation d'axe Δ
- La symétrie sphérique de centre O : la distribution est alors invariante par toutes les rotations d'axe passant par O

A chacune des trois premières invariances correspond une anti-invariance, pour laquelle $\rho(M) = -\rho(M')$

L'intérêt de ces invariances est que, si la distribution de charges présente une certaine invariance ou anti-invariance, alors le vecteur champ électrique présente la même.

Exemple 1. Soit une distribution de charges présentant une invariance par symétrie par rapport à un plan \mathcal{P} , soit M un point de l'espace et M' son symétrique par rapport à \mathcal{P} . Alors les champs électriques $\vec{E}(M)$ en M et $\vec{E}(M')$ en M' sont symétriques par rapport à \mathcal{P} . En particulier, que se passe-t-il si M est dans le plan \mathcal{P} ? Alors $M' = M$ donc $E(M') = E(M)$. Or $E(M')$ est le symétrique de $E(M)$ par rapport à \mathcal{P} . Cela n'est possible que si $E(M)$ est dans \mathcal{P} , ce qui permet d'affirmer :

Si une distribution de charges présente une symétrie par rapport à un plan, alors, en tout point de ce plan, le champ électrique créé par cette distribution est contenu dans ce plan.

Exemple 2. Considérons maintenant un cylindre infini (c'est-à-dire de hauteur infinie) \mathcal{C} de rayon R , uniformément chargé avec une densité volumique de charge ρ

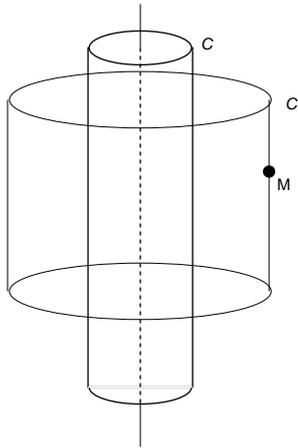
Si l'on appelle Δ l'axe du cylindre, nous sommes précisément dans le cas d'une distribution de charge à symétrie cylindrique, ce qui permet d'affirmer que le champ lui-même est à symétrie cylindrique. Soit un point M à une distance r de Δ , et soit le plan \mathcal{P} passant par M et perpendiculaire à Δ . Le cylindre étant infini, \mathcal{P} est un plan de symétrie de la distribution de charges donc, d'après l'exemple 1, le champ en M est contenu dans \mathcal{P} .

Soit alors le plan Π contenant à la fois M et l'axe Δ . Π est aussi un plan de symétrie de la distribution de charges contenant M donc le champ en M est contenu dans Π . Il est donc contenu dans l'intersection de \mathcal{P} et de Π : il est purement radial (c'est-à-dire que si l'on construisait un repère cylindrique d'axe \vec{e}_z égal à Δ , le champ serait de la forme $\vec{E} = E_r \vec{e}_r$).

Par ailleurs, la distribution étant à symétrie cylindrique, le champ l'est lui aussi, ce qui signifie que E_r est constant sur un cylindre d'axe Δ . Dès lors, considérons un cylindre \mathcal{C}' d'axe Δ passant par M et envisageons le flux du champ électrique à travers ce cylindre. On peut le voir comme la somme du flux à travers les extrémités et du flux à travers le pourtour. Or le champ est

radial, donc, au niveau des extrémités, $d\phi = \vec{E} \cdot \vec{n} dS = 0$. Il ne reste qu'à calculer la contribution du flux à travers le pourtour :

$$\begin{aligned}
 \phi &= \int_{cyl} d\phi \\
 &= \int_{cyl} \vec{E} \cdot \vec{n} dS \\
 &= \int_{cyl} E_r(r) \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r dS \text{ car le vecteur normal au cylindre est } \vec{e}_r \\
 &= E_r(M) \int_{cyl} dS \text{ car } E_r \text{ ne dépend que de la distance à } \Delta, \text{ constante sur } \mathcal{C}' \\
 &= E_r(M)S \text{ où } S \text{ est la surface de } \mathcal{C}'
 \end{aligned}$$



Or, d'après le théorème de Gauss, ϕ est par ailleurs égal $\frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$, où Q_{int} est la charge totale contenue dans \mathcal{C}' . Donc

$$E_r(M)S = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}.$$

Reste à calculer S et Q_{int} . L'aire du pourtour d'un cylindre est bien connue : $S = 2\pi r h$ où h est la hauteur de \mathcal{C}' . Pour le calcul de Q_{int} , deux cas se présentent :

- Si M est à l'intérieur du cylindre chargé, alors la charge contenue dans \mathcal{C}' est égale à ρ que multiplie le volume tout entier de \mathcal{C}' : $Q_{int} = \rho \pi r^2 h$. Alors $2\pi r h E_r(M) = \frac{\rho \pi r^2 h}{\epsilon_0}$ donc :

$$E_r(M) = \frac{\rho R}{2\epsilon_0}$$

- Si M est à l'extérieur du cylindre chargé, la charge contenue dans \mathcal{C}' est la charge contenue dans le cylindre chargé, sur une hauteur h : $Q_{int} = \rho\pi R^2 h$. Alors $2\pi r h E_r(M) = \frac{\rho\pi R^2 h}{\epsilon_0}$ donc :

$$E_r(M) = \frac{\rho R^2}{2r\epsilon_0}$$

De l'étude de cet exemple, il ressort que le théorème de Gauss peut fournir l'expression du flux avec très peu de calculs, pour peu que le cas étudié présente des symétries convenables. Les deux étapes cruciales dans son application sont :

- La recherche des symétries : ce sont les symétries qui permettent d'obtenir facilement (c'est-à-dire sans trop de calculs d'intégrales) l'expression du flux en fonction du champ ;
- Le choix d'une surface convenable. Il ne peut se faire qu'après la détermination des symétries : une symétrie cylindrique doit faire penser à une surface cylindrique, une symétrie sphérique à une surface sphérique, etc...

4.3 Le champ magnétostatique

Alors que le champ électrique est créé par des charges électriques, le champ magnétostatique a pour origine des *mouvements* de charges électriques, c'est-à-dire des courants. Par exemple, on a vu en classe de terminale qu'un solénoïde parcouru par un courant d'électrons produit un champ magnétique. Sans avoir l'ambition d'expliquer ce phénomène fondamental, nous allons essayer d'en fournir une description plus quantitative que celle proposée au lycée.

4.3.1 Loi de Biot et Savart

La loi de Biot et Savart est un peu à la magnétostatique ce que la loi de Coulomb est à l'électrostatique : une formule toujours vraie, mais rarement utilisable, sauf par l'amateur de calcul d'intégrales multiples.

De même que nous avons commencé par énoncer la loi de Coulomb dans le cas d'une simple particule chargée, nous allons essayer d'aller du simple au plus compliqué.

Elément de courant

Soit une distribution \mathcal{D} de courant, pouvant être surfacique ou volumique, et soit P un point de cette distribution. En P , la densité de courant est \vec{j}_v

pour une distribution volumique, \vec{j}_s pour une distribution surfacique et i pour une distribution linéique. Alors, par définition, on appelle élément de courant le vecteur :

- $d\vec{C} = \vec{j}_v dv$ dans le cas d'une distribution volumique ;
- $d\vec{C} = \vec{j}_s dS$ dans le cas d'une distribution surfacique ;
- $d\vec{C} = i d\vec{l}$ dans le cas d'une distribution linéique.

La loi de Biot et Savart

Son énoncé est le suivant. Si P et M sont deux points de l'espace, et si l'élément de courant en P est $d\vec{C}$, alors cet élément de courant crée en M un champ magnétostatique élémentaire :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} d\vec{C} \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3},$$

où $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} H.m^{-1}$.

C'est l'analogie de la loi de Coulomb donnant le champ électrique créé par une charge ponctuelle. Le champ total créé par une distribution s'obtient alors de la même façon, c'est-à-dire simplement en intégrant cette formule sur le domaine de la distribution :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} d\vec{C} \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Les trois formulations sont donc, selon la nature de la distribution :

$$\begin{aligned} \text{Volumique : } \vec{B}(M) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{j}_v d\tau \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \\ \text{Surfacique : } \vec{B}(M) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\mathcal{S}} \vec{j}_s dS \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \\ \text{Linéique : } \vec{B}(M) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} i d\vec{l} \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \end{aligned}$$

4.3.2 Le théorème d'Ampère

En magnétostatique comme en électrostatique, on dispose d'un théorème permettant dans de nombreux cas de s'affranchir des lourds calculs d'intégrales qu'imposerait l'application de la loi de Biot et Savart. Avant d'énoncer le théorème d'Ampère, voyons ce qu'est la circulation d'un champ, concept d'utilisation très courante en physique et intervenant tout particulièrement en électromagnétisme.

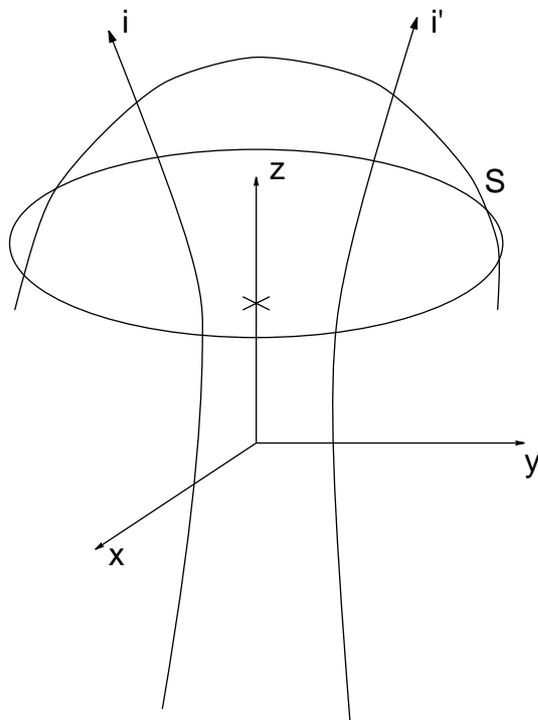
Circulation du champ magnétique

Considérons un contour fermé \mathcal{C} dans l'espace. La circulation d'un champ magnétique \vec{B} sur ce contour est définie comme l'intégrale sur \mathcal{C} suivante :

$$C_{\mathcal{C}} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

La notation \oint signifie simplement que l'intégrale se fait sur une courbe fermée.

Exemple. Considérons l'exemple schématisé ci-dessous, où \mathcal{C} est un cercle d'axe \vec{e}_z et de rayon R .



En coordonnées cylindriques, \mathcal{C} a pour équations :

$$\begin{cases} \rho = R \\ z = z_0 \end{cases}$$

Supposons que le champ magnétique soit uniforme dans l'espace : $\vec{B}(M) = B_0 \vec{e}_z$ en tout point M ; et calculons la circulation de ce champ sur \mathcal{C} .

Le plus simple est d'essayer de se ramener à une intégrale "classique", sur un segment. Pour cela, il faut commencer par exprimer les coordonnées de \vec{dl} , vecteur représentant une variation infinitésimale sur \mathcal{C} : comme nous l'avons vu en Mécanique, $\vec{dl} = R d\theta \vec{e}_\theta$. Or, en coordonnées cylindriques, $\vec{B} = B_0 \vec{e}_x = B_0 (\cos \theta \vec{e}_\theta + \sin \theta \vec{e}_\rho)$.

Finalement, $\vec{B} \cdot \vec{dl} = RB_0 \cos \theta d\theta$, et :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} RB_0 \cos \theta d\theta$$

En effet, lorsqu'un point parcourt \mathcal{C} , l'angle θ parcourt bien l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Cette intégrale se calcule aisément, et la circulation de \vec{B} sur \mathcal{C} est finalement :

$$C_{\mathcal{C}} = RB_0 [\sin \theta]_0^{2\pi} = 0$$

Enoncé du théorème d'Ampère

Soit un contour fermé \mathcal{C} , et soit \mathcal{S} une surface quelconque s'appuyant sur ce contour. Alors la circulation du champ magnétique sur \mathcal{C} est égale à μ_0 que multiplie le flux de la densité de courant à travers \mathcal{S} . Qu'entend on par "flux de la densité de courant" ? C'est la somme des courants électriques traversant \mathcal{S} , qu'ils soient linéiques, surfaciques ou volumiques.

Le théorème d'Ampère : utilisation pratique

Les étapes menant à l'application du théorème d'Ampère sont les mêmes que pour le théorème de Gauss. L'idée est de choisir un contour fermé \mathcal{C} convenable sur lequel le calcul de la circulation du champ magnétique est facile. Comme celle-ci est fonction du champ magnétique, si l'on peut connaître le courant électrique traversant une surface \mathcal{S} s'appuyant sur \mathcal{C} , on peut, dans de nombreux cas, en déduire la valeur du champ \vec{B} .

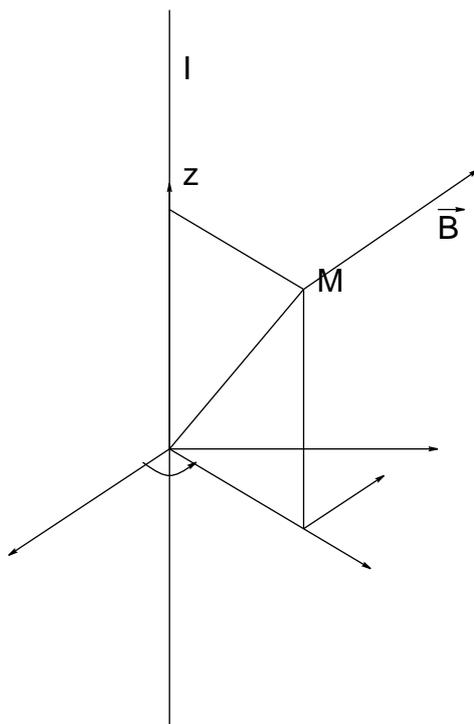
Le choix du contour et le calcul de la circulation sur ce contour n'est pas toujours aisé : là encore, il faut penser à regarder les invariances par symétrie. En effet, une invariance par symétrie de la distribution de courant se traduit par une invariance par antisymétrie du champ magnétique, tandis qu'une invariance par antisymétrie de la distribution de courant se traduit par une invariance par symétrie du champ magnétique.

Exemple du fil rectiligne infini Déterminons le champ magnétique créé par un fil rectiligne infini parcouru par un courant électrique I . Tout plan perpendiculaire à ce fil est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant, donc de symétrie du champ magnétique. De même, tout plan contenant ce

fil est un plan de symétrie de la distribution, donc d'antisymétrie du champ magnétique.

Soit donc un point M , en lequel on cherche à calculer le champ magnétique. Soit \mathcal{P} le plan contenant le fil et passant par M . Le champ magnétique est antisymétrique par rapport à \mathcal{P} , ce qui implique de manière triviale que $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire à \mathcal{P} . Ainsi, si on repère M dans un repère cylindrique d'axe \vec{e}_z dirigé par le fil, le champ s'écrit en tout point M $\vec{B}(M) = B(M)\vec{e}_\theta$

Par ailleurs, si l'on considère deux points M et M' à égale distance R du fil, et le milieu P du segment $[MM']$, alors la symétrie par le plan contenant le fil et passant par P transforme M en M' . Or ce plan est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc d'antisymétrie du champ. Cela implique en particulier que $\|\vec{B}(M)\| = \|\vec{B}(M')\|$, c'est-à-dire que $B(M) = B(M')$. Celant étant vrai pour tout M et M' à la distance R du fil, on en déduit que la valeur du champ magnétique ne dépend que de cette distance.



Dès lors, le choix du contour \mathcal{C} ne pose plus problème : on prend le cercle d'axe perpendiculaire dirigé par le fil et passant par M . Le disque correspondant est bien une surface s'appuyant sur \mathcal{C} , et il est traversé par le courant I .

Reste à calculer la circulation de \vec{B} sur \mathcal{C} :

$$C_{\mathcal{C}} = \oint_{\mathcal{C}} B(M) \vec{e}_{\theta} \cdot d\vec{l}$$

Nous avons vu en exemple que, dans notre cas, $d\vec{l} = R d\theta \vec{e}_{\theta}$, où R est le rayon de \mathcal{C} . Ainsi :

$$C_{\mathcal{C}} = \int_0^{2\pi} RB(M) d\theta$$

Or, comme nous l'avons dit ci-dessus, $B(M)$ ne dépend que de la distance entre M et le fil : $B(M)$ reste constant sur \mathcal{C} . Finalement, $C_{\mathcal{C}} = 2\pi RB(R)$. Donc $2\pi RB(R) = \mu_0 I$ et :

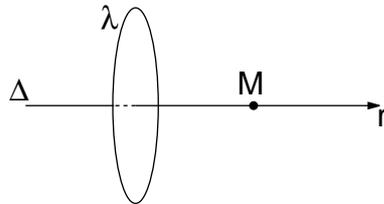
$$B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

4.4 Exercices

4.4.1 Compréhension du cours

Exercice 1. Calcul du champ magnétique sur l'axe d'une spire

Soit une spire de rayon a , d'axe Δ , parcourue par un courant constant I , et soit un point M placé sur l'axe de cette spire, à une distance r .



1. Montrer que le champ magnétique en M est dirigé selon Δ
2. En utilisant la loi de Biot et Savart, calculer le champ en M . On utilisera dans ce but le résultat de la question précédente. Il pourra être profitable d'introduire un repère cylindrique bien choisi.

Correction

1. Tout plan \mathcal{P} contenant Δ est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant donc un plan de symétrie du champ magnétique. Cela implique que, en tout point de \mathcal{P} , le champ magnétique est contenu dans

\mathcal{P} . Cela devant être vrai pour tout plan contenant l'axe, on en déduit que le champ en M est dirigé selon $\Delta : \overrightarrow{B}(M) = B(M) \overrightarrow{i}$, où \overrightarrow{i} est un vecteur directeur unitaire de Δ .

2. Commençons par énoncer la loi de Biot et Savart. Nous sommes face à un exemple de distribution linéique de courant, et cette loi se formule alors :

$$\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} id \overrightarrow{l} \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Il est effectivement plus simple de travailler en cylindrique, le repère idéal étant celui d'axe $\overrightarrow{e}_z = \overrightarrow{i}$ et d'origine le centre de la spire. On peut alors écrire de façon plus parlante les différents vecteurs intervenant dans l'intégrale :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dl} &= dl \overrightarrow{e}_\theta \\ &= a d\theta \overrightarrow{e}_\theta \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{PM} = -a \overrightarrow{e}_r + r \overrightarrow{e}_z$$

Alors :

$$\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{PM} = ar d\theta \overrightarrow{e}_r + a^2 d\theta \overrightarrow{e}_z$$

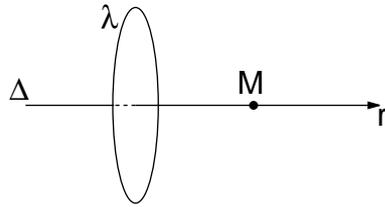
Or, nous avons vu que le champ total est porté par \overrightarrow{e}_z . La composante selon \overrightarrow{e}_r ne nous intéresse donc pas et il nous suffit de calculer l'intégrale :

$$\begin{aligned} B(M) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} I a^2 \frac{d\theta}{PM^3} \\ &= \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi (r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{\mu_0 I a^2}{2 (r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Exercice 2. Calcul du champ électrique sur l'axe d'une spire chargée

La géométrie du système est la même que dans l'exercice précédent, la spire étant cette fois chargée avec une charge linéique λ .

Déterminer le champ électrique créé par la spire en un point M quelconque de l'axe.



Correction

Là encore, et comme dans presque tout exercice d'électromagnétisme, il faut commencer par s'intéresser aux symétries. Tout plan \mathcal{P} contenant l'axe de la spire est plan de symétrie de la distribution de charge. Il est donc aussi plan de symétrie du champ électrique, ce qui implique que le champ en M est dirigé selon Δ .

Nous allons utiliser la loi de Coulomb (ce qui ne veut pas dire que nous n'avons pas pensé, avant tout, au théorème de Gauss, mais justement que son application serait ici plus lourde que celle de la loi de Coulomb...). Celle-ci nous fournit :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \lambda(P) \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} dl$$

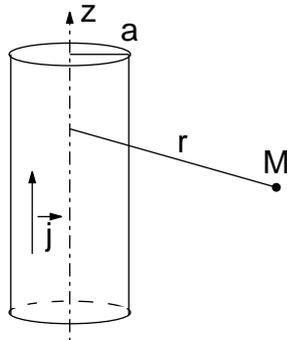
Comme dans l'exercice précédent, il est pratique d'exprimer \overrightarrow{PM} sur un repère cylindrique d'axe \vec{e}_z dirigé par l'axe de la spire et de centre le centre de la spire. Alors, $\overrightarrow{PM} = -a\vec{e}_r + r\vec{e}_z$. Seule nous intéresse la composante selon \vec{e}_z , et l'intégrale à calculer se réduit donc à :

$$\begin{aligned} E(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \lambda(P) \frac{r}{PM^3} dl \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \int_S dl \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} 2\pi a \\ &= \frac{\lambda a r}{2\epsilon_0 (r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Exercice 3. Calcul du champ magnétique créé par un cylindre infini

Soit \mathcal{C} un cylindre infini en longueur, de rayon a . On le suppose parcouru par un courant uniforme, de densité volumique $\vec{j} = j\vec{e}_z$. Déterminer le champ

magnétique créé par cette distribution de courant en un point quelconque M de l'espace.



Correction

Tout plan contenant l'axe du cylindre est plan de symétrie de la distribution de courant donc d'antisymétrie du champ magnétique. Cela est vrai en particulier pour le plan contenant l'axe et passant par M , ce qui implique que le champ magnétique \vec{B} est orthogonal au plan. Si l'on définit un repère cylindrique d'axe \vec{e}_z , le champ magnétique est donc dirigé selon \vec{e}_θ : $\vec{B}(\vec{M}) = B(M)\vec{e}_\theta$. Reste à calculer $B(M)$.

Pour cela, nous allons invoquer le théorème d'Ampère. Etant données les symétries du système, il est logique de choisir comme contour le cercle d'axe \vec{e}_z passant par M . En effet, par symétrie, le champ est de module constant sur ce contour et, de plus, tangent au cercle. La circulation du courant est donc $\mathcal{C} = 2\pi r B(M)$, $2\pi r$ étant la circonférence du contour.

Le calcul du flux de la densité de courant à travers le disque délimité par ce contour se fait en deux temps.

- Si M est à l'extérieur du cylindre, alors le flux de la densité de courant est égal à la totalité du courant parcourant le cylindre :

$$\phi = \pi a^2 j$$

- Si M est à l'intérieur du cylindre, seule une partie du courant parcourant le cylindre traverse le disque :

$$\phi = \pi r^2 j$$

En conclusion :

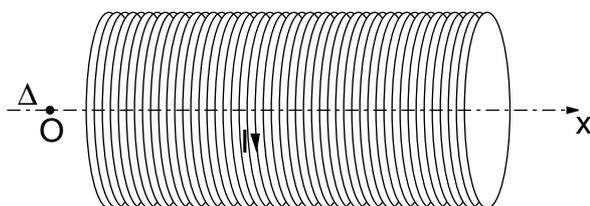
- Si $r \geq a$, $B(M) = \frac{\mu_0 a^2}{2r} j$
- Si $r \leq a$, $B(M) = \frac{\mu_0 r}{2} j$

4.4.2 Approfondissement

Exercice 4. Etude du solénoïde

L'objet de cet exercice est la démonstration de la fameuse formule donnant le champ magnétique créé sur son axe par un solénoïde infini. Il est nécessaire d'avoir au préalable résolu l'exercice 1 dont l'objet était le calcul du champ créé par une spire.

On considère donc un solénoïde infini d'axe Δ , de rayon a , comportant n spires par unité de longueur, et parcouru par un courant d'intensité I . Soit M un point quelconque sur Δ .



1. Que peut-on dire sur la direction et le sens du champ magnétique en M ?
2. Calculer la dérivée par rapport à x de la fonction $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$.
3. Soit x la position de M et soit $l > 0$. Montrer que la portion de solénoïde comprise entre $x - l$ et $x + l$ crée un champ magnétique qui peut se mettre sous la forme d'une intégrale que l'on déterminera.
4. En déduire le champ créé par un solénoïde infini.

Correction

1. Les arguments sont toujours les mêmes : tout plan contenant Δ est plan d'antisymétrie de la distribution de courant donc plan de symétrie du champ magnétique. Le champ en M est donc dirigé selon l'axe.
2. On peut se demander ce que cette question fait ici. Nul doute cependant qu'il faudra en utiliser le résultat dans les questions suivantes... et pourquoi pas dans le calcul de l'intégrale de la question 3 ?

Ne nous attardons pas sur les calculs : c'est la dérivée d'un quotient, dont la formule est connue depuis la première :

$$\frac{df}{dx} = \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

3. Cette question est plus délicate. Le fait qu'on attende un résultat sous forme intégrale doit nous aider : nous allons considérer le champ créé en M comme une somme de champs élémentaires. L'idée qui vous est peut-être venue en premier lieu est de le décomposer en la somme des champs créés par chaque spire. Malheureusement, en procédant de la sorte, on aboutirait à une somme difficile à calculer.

L'idée est donc de considérer le solénoïde comme une surface cylindrique, parcourue par un courant surfacique $j_s = In$. On décompose alors cette surface en une juxtaposition de spires fictives infiniment fines, d'épaisseur dx . Chacune de ces spires est alors parcourue par le courant $dI = Indx$ et sa contribution au champ en M est, d'après l'exercice 1 :

$$dB = \frac{\mu_0 n I a^2 dr}{2 (r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}},$$

où r est la distance de M à la spire.

La contribution de la portion de solénoïde comprise entre $x - l$ et $x + l$ est alors la somme de ces contributions infinitésimales : c'est donc une intégrale, prise entre $-l$ et l .

$$\begin{aligned} B &= \int_{-l}^l \frac{\mu_0 n I a^2 dr}{2 (r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 n I a^2}{2} \int_{-l}^l \frac{dr}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

C'est ici qu'intervient le résultat obtenu dans la question précédente : il nous fournit l'expression de l'intégrale donc du champ.

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 n I a^2}{2} \frac{1}{a^2} \left[\frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right]_{-l}^l \\ &= \frac{\mu_0 n I l}{\sqrt{l^2 + a^2}} \end{aligned}$$

4. Il suffit de faire tendre l vers l'infini, ce qui fournit :

$$B(M) = \mu_0 n I$$

On retrouve bien la formule classique.

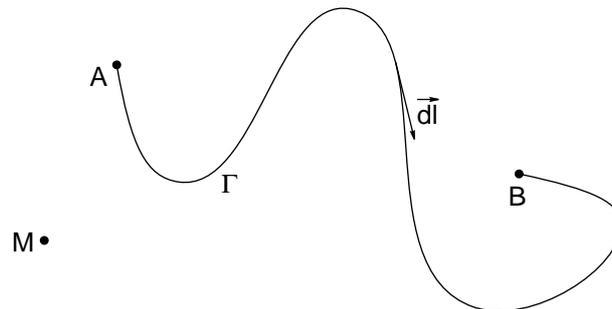
Exercice 5. Notion de circulation - comportement du champ électrique au voisinage d'une surface chargée

L'objet de ce petit problème est l'analyse du comportement du champ électrostatique au voisinage d'une surface de charge surfacique σ . Cette étude nécessite l'introduction d'une nouvelle notion : la circulation du champ électrostatique. Nous allons commencer par définir cette grandeur puis nous en étudierons quelques propriétés. Nous pourrions ensuite étudier le problème annoncé.

1. Soit une particule ponctuelle M de charge q . Soient A et B deux points de l'espace et Γ une courbe quelconque joignant ces deux points. On appelle *circulation* sur Γ de A vers B l'intégrale :

$$C = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

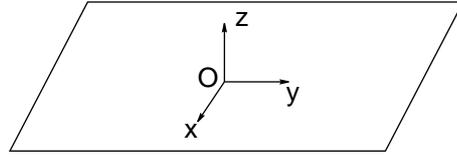
où $d\vec{l}$ est le déplacement élémentaire, dirigé de A vers B , sur la courbe Γ .



Montrer que cette grandeur ne dépend pas du chemin suivi pour aller de A à B (c'est-à-dire de Γ).

2. Généraliser au cas où le champ est créé par une distribution quelconque de charge (on pourra commencer par traiter le cas d'un système de charges ponctuelles et élargir ensuite).
3. En déduire que la circulation du champ sur un contour fermé est nulle.
4. Soit une surface chargée, de charge surfacique σ et soit un point O sur cette surface. On définit un repère cartésien d'origine O et d'axe \vec{e}_z perpendiculaire à la surface.

Le champ électrique peut être décomposé en une composante tangente au plan ($\vec{E}_t = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y$) et une composante normale ($\vec{E}_n = E_z \vec{e}_z$).



Montrer que la composante tangentielle est continue au passage de la surface chargée.

Pour cela, on pourra considérer un contour rectangulaire dont les sommets sont de coordonnées respectives $(0, 0, dz)$, $(0, 0, -dz)$, (dx, dy, dz) et $(dx, dy, -dz)$.

Correction

1. Le champ étant créé par une particule ponctuelle, il est naturel de l'exprimer en utilisant la loi de Coulomb :

$$\vec{E}(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{r^2},$$

où r est la distance séparant M et P et \vec{e}_r est le vecteur unitaire $\frac{\overrightarrow{MP}}{r}$. L'intégrale définissant la circulation s'écrit alors :

$$\mathcal{C} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{\vec{e}_r \cdot d\vec{l}}{r^2}$$

$\vec{e}_r \cdot d\vec{l}$ est la projection sur \vec{e}_r de $d\vec{l}$: ce n'est autre que dr , ce qui rend trivial le calcul de notre intégrale.

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \end{aligned}$$

Sous cette forme, il est clair que \mathcal{C} ne dépend que de r_A et de r_B : la circulation du champ électrostatique ne dépend pas du chemin suivi.

2. La généralisation repose sur le principe de superposition. Le champ créé par un système de n particules chargées est la somme des champs créés par chacune de ces particules et la circulation associée est donc :

$$\mathcal{C} = \int_A^B \sum_n \vec{E}_n \cdot d\vec{l}$$

$$= \sum_n \int_A^B \vec{E}_n \cdot d\vec{l}$$

D'après la question précédente, aucune des intégrales de la somme ne dépend de Γ . La somme n'en dépend donc pas, ce qui démontre que la circulation d'un champ créé par un système de charges ponctuelles ne dépend pas du chemin suivi.

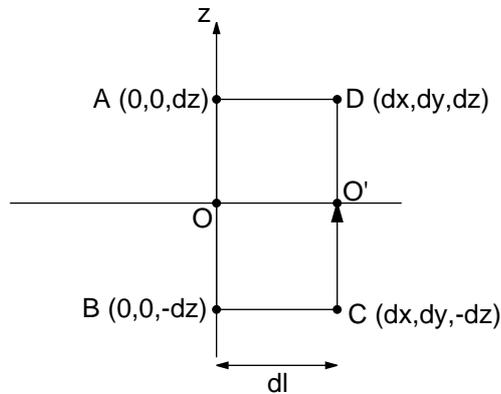
Pour une distribution quelconque de charges (linéique, surfacique, ou volumique), l'argument est le même que celui utilisé dans le cours : on considère la distribution comme une juxtaposition de volumes chargés tendant vers 0. A la limite, ces volumes peuvent être considérés comme des particules ponctuelles et le raisonnement ci-dessus permet de conclure.

3. C'est immédiat. Il suffit de prendre un point quelconque A sur le contour fermé. La circulation sur ce contour est alors l'intégrale de A à ... A de $\vec{E} \cdot d\vec{l}$. Or la circulation ne dépend pas du chemin suivi. On peut donc suivre un autre chemin : le chemin nul. La circulation est alors effectivement nulle.
4. Le problème est que, a priori, le champ n'est pas continu au passage de la surface chargée. En effet, la loi de Coulomb montre que le champ à une distance r d'une charge ponctuelle est en $\frac{1}{r^2}$, donc non défini au niveau de la charge, puisque $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} = \infty$. Puisqu'il en est ainsi pour une charge ponctuelle, le champ n'a pas de raison d'être continu, ni même défini, au passage d'une surface chargée.

Suivons la méthode proposée dans l'énoncé. Les questions précédentes nous mettent sur la voie. Le contour proposé est fermé donc la circulation du champ y est nulle. L'idée est que, en dehors de la surface, le champ est continu. Nous allons donc décomposer la circulation pour faire apparaître des grandeurs facilement calculables. Les côtés du rectangle étant des infiniments petits, le champ peut être y considéré comme constant pour peu qu'il soit continu, c'est-à-dire tant qu'on ne traverse pas la surface.

La circulation peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \int_A^O \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_O^B \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_C^{O'} \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &+ \int_{O'}^D \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= -E_n(0, 0, dz)dz - E_n(0, 0, -dz)dz + E_t(0, 0, -dz)dl + E_n(dx, dy, -dz)dz \\ &+ E_n(dx, dy, dz)dz - E_t(dx, dy, dz)dl, \end{aligned}$$



Puisque le champ est constant sur le rectangle tant qu'on ne traverse pas la surface, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} E_n(0, 0, dz) &= E_n(dx, dy, dz) \\ E_n(0, 0, -dz) &= E_n(dx, dy, -dz) \\ E_t(0, 0, dz) &= E_t(dx, dy, dz) \\ E_t(0, 0, -dz) &= E_t(dx, dy, -dz) \end{aligned}$$

La circulation se simplifie donc considérablement :

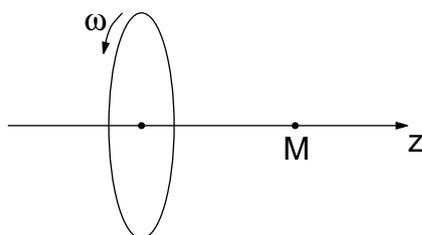
$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= -E_n(0, 0, dz)dz - E_n(0, 0, -dz)dz + E_t(0, 0, -dz)dl + E_n(0, 0, -dz)dz \\ &+ E_n(0, 0, dz)dz - E_t(0, 0, dz)dl \\ &= E_t(0, 0, -dz)dl - E_t(0, 0, dz)dl \end{aligned}$$

Comme le contour est fermé, $\mathcal{C} = 0$, donc $E_t(0, 0, -dz) = E_t(0, 0, dz)$. La composante tangentielle est donc bien continue au passage de la surface chargée. On montre en deuxième année que la composante normale est effectivement discontinue, la valeur du saut étant proportionnelle à la charge surfacique σ .

Exercice 6. L'expérience du disque de Rowland

Soit un disque de rayon a et d'axe Δ , chargé avec la charge surfacique σ . On suppose qu'il est en rotation autour de son axe, avec la vitesse angulaire ω . Quel est le champ magnétique créé en un point M de Δ ? On pourra s'intéresser au préalable au calcul de la quantité suivante :

$$f(r) = \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 + 2z^2}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right)$$



Correction

Le disque étant en rotation, la distribution de charges qu'il porte est en mouvement : elle constitue donc une distribution de courant qui donne naissance à un champ magnétique. Il faut donc avant tout déterminer la distribution de courant, sachant que celle-ci est nécessairement surfacique puisque la distribution de charge l'est.

L'idée est de décomposer le disque en une juxtaposition de couronnes concentriques délimitées par les rayons r et $r + dr$. Le débit de charge parcourant une telle couronne est $di = \sigma r \omega dr$. On peut donc voir le disque en rotation comme une juxtaposition de spires d'axe Δ parcourues par un courant d'intensité $di = \sigma r \omega dr$.

D'après l'exercice 1, le champ créé par chacune de ces spires est dirigé selon Δ et vaut :

$$\begin{aligned} dB &= \frac{\mu_0 r^2 di}{2(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 \sigma \omega r^3 dr}{2(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Le champ total est donc, par sommation :

$$B = \int_0^a \frac{\mu_0 \sigma \omega r^3 dr}{2(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Le calcul de cette intégrale est délicat. Aidons nous de l'indication de l'énoncé et calculons la dérivée proposée.

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 + 2z^2}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) = \frac{r^3}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

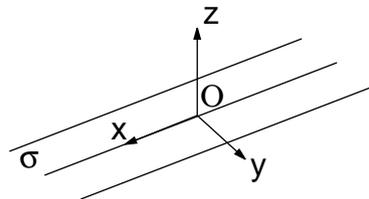
On en déduit, par intégration :

$$B = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left[\left(\frac{r^2 + 2z^2}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) \right]_0^a$$

$$= \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left(\frac{a^2 + 2z^2}{\sqrt{a^2 + z^2}} - 2z \right)$$

Exercice 7. Champ électrique créé par un ruban infini

1. Quel est le champ électrique créé en un point M quelconque de l'espace par un fil rectiligne infini de charge linéique λ ? On utilisera successivement deux méthodes différentes, dont l'une reposera sur le calcul du champ créé par un cylindre infini proposé en exemple dans le cours.
2. Soit un ruban infini \mathcal{R} de largeur $2a$ et de charge surfacique σ . On choisit le repère schématisé ci-dessous.



Quel est le champ créé par ce ruban en un point M de coordonnées $(x, 0, z)$? On l'exprimera en fonction de l'intégrale

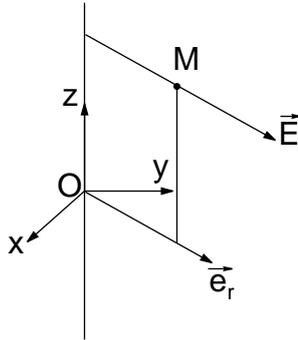
$$I_{a,z} = \int_0^a \frac{dy}{y^2 + z^2},$$

que l'on ne cherchera pas à calculer.

Correction

1. Avant de choisir une méthode, il faut commencer à analyser les symétries. Tout plan contenant le fil ou normal à ce fil est plan de symétrie de la distribution de charge, donc du champ électrostatique. En particulier le plan contenant le fil et passant par M , de même que celui normal au fil et passant par M . Le champ en M est donc contenu dans ces deux plans, ce qui implique qu'il est radial. C'est-à-dire que si l'on considère un repère cylindrique d'axe \vec{e}_z dirigé par le fil, le champ s'écrit $\vec{E}(M) = E_r \vec{e}_r$

L'énoncé nous demande de nous appuyer dans un premier temps sur l'exemple du cylindre infini traité en cours. On y avait montré que le champ électrique créé à une distance r de l'axe par un cylindre infini de charge volumique ρ et de rayon R est $E_r = \frac{\rho R^2}{2r\epsilon_0}$.



L'idée est que ce champ ne dépend, pour ce qui concerne le cylindre, que du produit ρR^2 . Or, pour $h > 0$ quelconque, $\pi R^2 h \rho$ est la charge contenue dans le cylindre sur une hauteur h . Lorsqu'on fait tendre le rayon R vers 0, le cylindre tend vers un fil infini, de charge linéique λ' telle que $\lambda' h = \pi R^2 h \rho$.

En d'autres termes, le champ créé par notre fil de charge linéique λ est aussi celui créé par un cylindre infini de charge volumique $\rho' = \frac{\lambda}{\pi R^2}$.

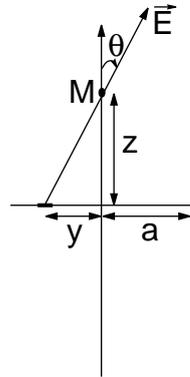
En conclusion :

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$$

L'autre méthode consiste à utiliser le théorème de Gauss : on considère comme surface de Gauss un cylindre passant par M , d'axe dirigé par le fil et de hauteur h quelconque. Le flux à travers cette surface est alors $\phi = 2\pi r h E_r$. D'après le théorème de Gauss, il est aussi égal à $\frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$.

On a donc $E_r = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$

- Commençons par regarder les symétries du système. Le plan passant par M et contenant l'axe des x est un plan de symétrie de la distribution de charges, donc du champ électrostatique. Le champ est donc contenu dans ce plan. Par ailleurs, le plan perpendiculaire à l'axe des x et passant par M est aussi un plan de symétrie du champ. On en déduit que le champ en M est dirigé selon l'axe des z . Reste à déterminer son module. Là encore, l'idée est de décomposer le ruban en une juxtaposition d'éléments dont on sait calculer la contribution au champ électrique. Nous pouvons ici considérer le ruban infini comme une juxtaposition de rubans infinis de largeur dy , où dy est un infiniment petit. Dès lors, chacun de ces rubans peut être vu comme un fil infini de charge linéique σdy , dont nous venons de calculer la contribution au champ. Il reste à projeter celle-ci sur l'axe des z .



$$\begin{aligned}
 dE_z &= dE_r \cos \theta \\
 &= dE_r \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \\
 &= \frac{\sigma dy}{2\pi\sqrt{y^2 + z^2}\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}} \\
 &= \frac{\sigma z dy}{2\pi\epsilon_0 (y^2 + z^2)}
 \end{aligned}$$

Il reste à intégrer sur la largeur du ruban (il suffit d'intégrer sur une demi-largeur et de multiplier par deux) :

$$\begin{aligned}
 E_z &= 2 \int_0^a \frac{\sigma z dy}{2\pi\epsilon_0 (y^2 + z^2)} \\
 &= 2 \frac{\sigma z}{2\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{dy}{y^2 + z^2} \\
 &= \frac{\sigma z}{\pi\epsilon_0} I_{a,z}
 \end{aligned}$$